IBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILE

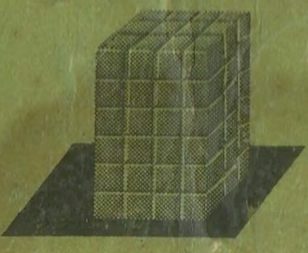
PROF. JACOMO STÁVALE

Elementos de Matemática

Primeiro Volume

para a

Primeira Série do Curso Ginasial



COMPANHIA EDITORA NACIONAL

...ENTOS DE MATEMÁTICA – 1.º VOLUME – JACOMO STÁVALE.

C. Em 02/54 B5,00

Jenner

Elementos de Matemática

PRIMEIRO VOLUME

Tôdas as lições dêste compêndio foram transcritas dos **Elementos de Matemática** do mesmo autor, em quatro volumes, cujo uso foi autorizado pelo *Ministério de Educação e Saúde*, de acôrdo com os Registros ns. 1 171, 856, 858 e 1 352.

Direitos autorais reservados
Registros números 5 226 e 6 625 — Biblioteca Nacional

Este compêndio está de acôrdo com os novos programas, conforme Portaria n.º 966, de 2/10/51 e n.º 1 045, de 14/12/51, do M. E. S.

Exemplar **Nº 181606**

Jacomo Stávale

1953

Obra executada nas oficinas da
São Paulo Editora S/A. — Rua Barão de Ladário, 226
Fones: 9-9087 e 9-9932 — São Paulo, Brasil

SÉRIE 2.ª LIVROS DIDÁTICOS VOL. 113
BIBLIOTECA PEDAGÓGICA BRASILEIRA

Prof. Jacomo Stávale

Elementos de Matemática

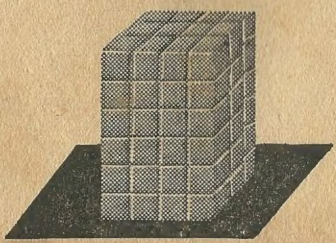
PRIMEIRO VOLUME

para a
Primeira Série do Curso Ginasial

Numerosos exercícios orais e de classe
1 000 exercícios escritos e problemas

Savoir, c'est connaître une chose d'une manière évidente et certaine; c'est, de plus, en connaître la raison.
PORT-ROYAL

37.ª edição - 185 milheiros



COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

OBRAS PUBLICADAS PELO AUTOR

Portaria Ministerial de 18 de abril de 1931

Primeiro Ano de Matemática. *Dezenove edições,* 95 milheiros...... ESGOTADO
Segundo Ano de Matemática. *Treze edições,* 65 milheiros .... ESGOTADO
Terceiro Ano de Matemática. *Nove edições,* 45 milheiros.......... ESGOTADO
Quarto Ano de Matemática. *Sete edições,* 35 milheiros.......... ESGOTADO
Quinto Ano de Matemática. *Quatro edições,* 20 milheiros........ ESGOTADO

Portaria Ministerial de 11 de julho de 1942

Elementos de Matemática. Primeiro Volume.
Trinta e sete edições, 185 milheiros.

Elementos de Matemática. Segundo Volume.
Vinte e nove edições, 145 milheiros.

Elementos de Matemática. Terceiro Volume.
Dezesete edições, 85 milheiros.

Elementos de Matemática. Quarto Volume.
Treze edições, 65 milheiros.

Problemas de Matemática, Primeira Série Ginasial.
780 exercícios com os resultados. *Brochura*........... Cr$ 12,00

Problemas de Matemática, Segunda Série Ginasial.
750 exercícios com os resultados. *Brochura*........... Cr$ 12,00

Problemas de Matemática, Terceira Série Ginasial.
1 200 exercícios com os resultados. *Brochura*........... Cr$ 12,00

Problemas de Matemática, Quarta Série Ginasial.
1 400 exercícios com os resultados. *Brochura*........... Cr$ 12,00

EDIÇÕES DA
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 — São Paulo

ADVERTÊNCIA

ÊSTE livro está de acôrdo com a Portaria Ministerial de 2 de outubro de 1951, tendo sido observado rigorosamente o programa indicado na mesma, assim como as instruções metodológicas que se lhe seguiram.

Fortemente amparado pelos meus colegas de magistério, os quais sempre reconheceram a minha indiscutível vontade de escrever livros perfeitamente ao alcance dos jovens ginasianos, espero que êste compêndio continui a merecer o mesmo apôio e carinho por parte dos senhores professores e alunos.

"Procurar-se-á despertar, aos poucos, no aluno, o sentimento da necessidade da justificativa, da prova e da demonstração, introduzindo-se o método dedutivo, com o cuidado que exige, ainda no curso ginasial". Êste é um dos conselhos das instruções metodológicas do programa atual. E é justamente o que venho fazendo há vinte anos. Os teoremas apresentados neste livro, em número bastante reduzido, são de demonstração muito simples e cuja finalidade principal é exercitar os estudantes na arte de raciocinar com acêrto para que, mais tarde, possam aprender com facilidade o método dedutivo que é o método por excelência, da Matemática.

Ficarei sinceramente grato aos colegas que apontarem sem rebuços, os senões que encontrarem neste compêndio.

São Paulo, outubro de 1952

O Autor

Rua Safira, 9. (Aclimação)

ÍNDICE — SUMÁRIO

Cap. I — Operações Fundamentais

CAP. II — **Divisibilidade Aritmética — Números Primos**

CAP. III — **Números Fracionários**

CAP. IV — **Sistema Legal de Unidades de Medir**

1955

CAPÍTULO I

Operações Fundamentais

1. Noção do número natural. "Tôda a gente sabe como as necessidades da vida corrente exigem que, a cada momento, se façam contagens; o pastor para saber se não perdeu alguma cabeça do seu rebanho, o operário para saber se recebeu todo o salário que lhe é devido, a dona de casa ao regular as suas despesas pelo dinheiro de que dispõe, o homem de laboratório ao determinar o número exato de segundos que deve durar uma experiência, a todos se impõe constantemente, nas mais variadas circunstâncias, a realização de contagens. Como resolveram os homens o problema da necessidade da contagem? A resposta a esta pergunta é a seguinte: — *pela criação dos* ***números naturais***

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\ \ldots\ldots\ \infty$$

Esta é a ***sucessão dos números naturais***" (*).

Observação. O símbolo ∞ que se lê *infinito*, significa que a sucessão dos números naturais é ilimitada; é *infinita*. Com efeito, por muito grande que seja uma coleção de objetos que precisamos contar, podemos sempre juntar-lhe mais um objeto, o que nos obrigará à criação de mais um número natural.

2. Grandeza, unidade, medida. Várias *pilhas de livros*, algumas *porções de laranjas*, os *comprimentos* das linhas, as *larguras* das ruas, as *alturas* das tôrres, as *profundidades* dos rios, os *volumes* das caixas, os *pesos* dos corpos, as *temperaturas* de ambientes diferentes, as *áreas* das salas de aula, eis aí muitas coisas que se podem comparar entre si, isto é, verificar se uma

---

(*) BENTO DE JESUS CARAÇA. *Conceitos Fundamentais da Matemática*, vol. 1.º, pág. 9. Editora Cosmos, rua da Emenda, 111 — 2.º, Lisboa. E na pág. 11 desta obra magistral encontramos esta incontestável verdade: "A idéia do número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente, pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando duma maneira completa a idéia do número, para depois a aplicar à prática da contagem, é cômoda, mas falsa".

pilha de livros tem mais ou menos livros do que outra; se uma rua é mais ou menos larga do que outra; se um corpo pesa mais ou menos do que outro; se uma linha é mais ou menos comprida do que outra, etc.. Referindo-nos a esta possibilidade, diremos que as *pilhas* de livros, os *comprimentos*, as *alturas*, os *volumes*, as *temperaturas*, etc., são ***grandezas*** (*).

As grandezas podem ser classificadas em dois grupos: *grandezas contínuas* e *grandezas descontínuas*.

Grandeza contínua *é um todo cujas partes não são distintas umas das outras.* Os comprimentos, as larguras, as alturas, as espessuras, as profundidades, etc., são grandezas contínuas.

Grandeza descontínua ou discreta *é um todo cujas partes são distintas umas das outras.* Um grupo de estudantes, uma pilha de livros, uma porção de laranjas, uma fileira de automóveis, etc., são grandezas descontínuas.

Medir ou ***avaliar*** uma grandeza é compará-la com outra da mesma espécie, porém conhecida, definida ou determinada. Medir por exemplo, o comprimento de uma fita, significa verificar quantas vêzes outro ***comprimento*** pode ser aplicado ao longo do comprimento desta fita. Admitamos que êste outro comprimento está contido ***sete vêzes*** no comprimento da fita. A êste resultado dá-se o nome de ***número.***

Portanto, ***número é o resultado da avaliação de uma grandeza,*** ou então, ***é a relação que existe entre uma grandeza qualquer e outra da mesma espécie, tomada como têrmo de comparação.*** (*Definição de Newton*)

A grandeza definida, conhecida, por meio da qual se mede outra grandeza da mesma espécie, chama-se ***unidade.*** Portanto,

> **Unidade é a grandeza definida por meio da qual se mede outra grandeza da mesma espécie.**

A ***unidade é arbitrária*** ou ***determinada.*** É ***arbitrária,*** quando a grandeza que se quer medir é ***contínua;*** é ***determinada,*** quando a grandeza que se quer medir é ***descontínua.*** Queremos saber quantos livros existem em uma estante; a uni-

(*) S. Pincherle, *Algebra Elementar.* Manuais Hoepli, Milão, 15.ª edição, 1913, pág. 1.

dade se impõe: ***é um livro.*** Entretanto, para medir o comprimento de uma sala, a unidade pode ser qualquer; uma fita, um cordel, uma vara, o metro, o decímetro, o centímetro, etc..

A avaliação de uma grandeza descontínua não oferece dificuldade. Considerando, por exemplo, uma pilha de livros, o que nos interessa, quasi sempre, em relação a esta espécie de grandeza, é saber quantos livros a pilha contém; é ***contar*** os livros que formam esta pilha. ***Contar*** é uma operação que aprendemos nos primeiros anos da escola primária, e da operação de contar resulta a primeira noção do ***número.*** A grande dificuldade está na avaliação das grandezas contínuas.

A Matemática é a ciência que tem por fim estabelecer as relações que existem entre as diferentes grandezas, de modo que se possam medir umas por intermédio das outras.

Observação. Esta definição será justificada com vagar. (§ §122, 127, 133, 134, etc..)

3. Os números naturais. Suponhamos que, medindo um segmento retilíneo, se verifica que êle contém a unidade exatamente ***oito*** vêzes. ***Oito*** é um ***número natural.***

Portanto, *número natural é o número que resulta da avaliação de uma grandeza que contém a unidade, exatamente uma ou mais vêzes.*

Observação. Pode acontecer que a grandeza que se quer medir não contenha a unidade, *exatamente, uma ou mais vêzes.* Resultará então da avaliação desta grandeza uma outra espécie de número, que estudaremos mais tarde. (§82)

O número pode ser ***concreto*** ou ***abstrato.*** É ***concreto*** quando se menciona o nome da unidade, por exemplo, ***oito livros.*** É ***abstrato*** quando não se menciona o nome da unidade, por exemplo: ***oito.*** (*)

Os números concretos são quantidades. Por exemplo, 8 livros, 5 flores, 7 metros, etc., são *quantidades.*

4. Formação dos números. O primeiro número natural resulta da avaliação de uma grandeza igual à unidade adotada. Chama-se *unidade* ou ***um.*** O seguinte resulta da avaliação de uma grandeza que contém a unidade, ***uma vez e mais uma.***

(*) A classificação dos números em *concretos* e *abstratos*, embora condenada por alguns autores, é adotada pelo insigne matemático J. Rey Pastor. (***Aritmética***) primeira parte, Buenos Aires, 1937). E, ainda de acôrdo com o mesmo autor (*Aritmética*, segunda parte, Buenos Aires, 1938) um número concreto é uma quantidade.

Chama-se ***dois.*** O seguinte resulta da avaliação de uma grandeza que contém a unidade, *duas vêzes e mais uma.* Chama-se ***três.*** O seguinte resulta da avaliação de uma grandeza que contém a unidade, *três vêzes* e *mais uma.* Chama-se ***quatro.*** Donde se conclui que, além dos *números um, dois, três, quatro,* há uma infinidade de números naturais. Portanto, ***a sucessão dos números naturais é ilimitada.***

Ao conjunto dos números naturais chamaremos, na frase elegante de P. Crantz, o nosso ***campo numérico.*** Mais tarde, êste campo será ampliado de acôrdo com os problemas que a Matemática nos apresentar. (§ 82)

5. Numeração falada ou nomenclatura dos números. A sucessão dos números naturais é ilimitada. (§ 1) Mas, como dar a cada um dêles um nome que o distinguisse de todos os outros?

Inventar nomes completamente distintos para cada número, como foram inventadas, por exemplo, as palavras *um, dois, três,* etc., era impossível. E mesmo que êste impossível fosse conseguido, não haveria memória capaz de reter êste conjunto formidável de palavras. Entretanto, conseguiu-se dar um nome distinto a cada número, mediante o artifício conhecido pelo nome de ***numeração falada.***

Chama-se numeração falada ou nomenclatura dos números, *a um modo simples e regular de denominar todos os números. Os nomes dos números devem ser formados de modo que só se empregue um limitado número de palavras, para que se possa retê-las na memória e, além disso, que cada nome, pelo modo mesmo por que êle foi formado, dê idéia da ordem de grandeza do número e do lugar que êle ocupa na sucessão dos números naturais.* (Euclides Roxo)

6. Os elementos da numeração falada. A sucessão dos números naturais é ilimitada. Entretanto, para dar um nome distinto a cada um dêles, e de acôrdo com a definição da numeração falada, foram necessários, apenas, *três elementos:*

a) inventaram-se as palavras *um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, cem* e *mil;*

b) inventaram-se duas terminações: *enta* e *lhão;*

c) estabeleceu-se o seguinte princípio: *dez unidades de uma mesma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior.*

Êste é o *princípio fundamental da numeração decimal.*

De acôrdo com êste princípio, *dez* coisas quaisquer supostas da mesma espécie, e que chamaremos de *unidades simples,* formam uma nova espécie de unidade que se denomina *dezena;* por sua vez *dez dezenas* formam uma nova espécie de unidade que se denomina *centena; dez centenas* formam uma nova espécie de unidade que se denomina *unidade de milhar;* e assim por diante.

7. Unidades simples, dezenas e centenas; ***1.° quadro.***

Primeira classe ou classe das unidades simples		
Centenas ou *unidades de terceira ordem*	*Dezenas* ou *unidades de segunda ordem*	*Unidades simples* ou *unidades de primeira ordem*
cem	dez	um
duzentos	vinte	dois
trezentos	trinta	três
quatrocentos	quarenta	quatro
quinhentos	cincoenta	cinco
seiscentos	sessenta	seis
setecentos	setenta	sete
oitocentos	oitenta	oito
novecentos	noventa	nove

Examinando êste quadro veremos que:

a) Os nomes das unidades simples foram inventados;

b) Os nomes das unidades de segunda ordem são derivados dos nomes das unidades de primeira ordem, aos quais se juntou o sufixo *enta;*

c) Os nomes das unidades de terceira ordem são os nomes das unidades de primeira ordem, ligados à palavra *centos.*

A palavra *cem* é primitiva.

O quadro acima contém vinte e sete palavras que, combinadas convenientemente, permitem denominar novecentos e noventa e nove números. É claro que, para designar uma coleção de objetos, que contém *oitocentos* objetos mais *cincoenta* e mais *sete*, não é necessário inventar uma palavra nova; é bastante dizer *oitocentos e cincoenta e sete*.

As unidades simples, as dezenas e as centenas constituem a ***primeira classe*** ou ***classe das unidades simples.***

Observação. Em lugar de *dez e um, dez e dois, dez e três, dez e quatro, dez e cinco*, dizemos *onze, doze, treze, quatorze* e *quinze*. Os estudantes aprenderão, nas aulas de latim, a razão de ser destas irregularidades.

8. Unidades, dezenas e centenas de milhar; *2.° quadro.*

Segunda classe ou classe das unidades de milhar		
Centenas de milhar ou *unidades de sexta ordem*	*Dezenas de milhar* ou *unidades de quinta ordem*	*Unidades de milhar* ou *unidades de quarta ordem*
cem mil	dez mil	um mil
duzentos mil	vinte mil	dois mil
trezentos mil	trinta mil	três mil
quatrocentos mil	quarenta mil	quatro mil
quinhentos mil	cincoenta mil	cinco mil
seiscentos mil	sessenta mil	seis mil
setecentos mil	setenta mil	sete mil
oitocentos mil	oitenta mil	oito mil
novecentos mil	noventa mil	nove mil

De acôrdo com o princípio fundamental da numeração decimal, *dez centenas* formam *uma unidade de milhar* ou *unidade de quarta ordem; dez unidades de milhar* formam *uma dezena de milhar* ou *unidade de quinta ordem; dez dezenas de milhar* formam *uma centena de milhar* ou *unidade de sexta ordem.*

A primeira coluna, à direita (segundo quadro) contém os nomes das unidades de milhar ou unidades de quarta ordem. A segunda coluna contém os nomes das dezenas de milhar ou unidades de quinta ordem. A terceira coluna contém os nomes das centenas de milhar ou unidades de sexta ordem.

As unidades, dezenas e centenas de milhar constituem a ***segunda classe*** ou ***classe das unidades de milhar.***

Os nomes das unidades de segunda classe são os nomes das unidades correspondentes da primeira classe, ligados com a palavra *mil*, que é primitiva ou inventada. E, reunindo convenientemente as vinte e sete palavras do segundo quadro com as vinte e sete do primeiro, podemos denominar novecentos e nove mil novecentos e noventa e nove números diferentes.

9. Unidades, dezenas e centenas de milhão; *3.º quadro.*

Terceira classe ou classe das unidades de milhão		
Centenas de milhão ou unidades de nona ordem	*Dezenas de milhão ou unidades de oitava ordem*	*Unidades de milhão ou unidades de sétima ordem*
cem milhões duzentos milhões trezentos milhões quatrocentos milhões quinhentos milhões seiscentos milhões setecentos milhões oitocentos milhões novecentos milhões	dez milhões vinte milhões trinta milhões quarenta milhões cincoenta milhões sessenta milhões setenta milhões oitenta milhões noventa milhões	um milhão dois milhões três milhões quatro milhões cinco milhões seis milhões sete milhões oito milhões nove milhões

De acôrdo com o princípio fundamental da numeração decimal, *dez centenas de milhar* formam *uma unidade de milhão* ou *unidade de sétima ordem; dez unidades de milhão* formam *uma dezena de milhão* ou *unidade de oitava ordem; dez dezenas de milhão* formam *uma centena de milhão* ou *unidade de nona ordem.*

A primeira coluna, à direita (terceiro quadro) contém os nomes das unidades de milhão ou unidades de sétima ordem. A segunda coluna contém os nomes das dezenas de milhão ou unidades de oitava ordem. A terceira coluna contém os nomes das centenas de milhão ou unidades de nona ordem.

As unidades, dezenas e centenas de milhão constituem a ***terceira classe*** ou ***classe das unidades de milhão.***

Os nomes das unidades de terceira classe são os nomes das unidades correspondentes da primeira classe, ligados com a pa-

lavra *milhão*. Esta palavra foi constituída pela palavra *mil*, reunida com o sufixo *lhão*. E, reunindo convenientemente as vinte e sete palavras do terceiro quadro, com as vinte e sete do segundo e com as vinte e sete do primeiro, podemos denominar novecentos e noventa e nove milhões, novecentos e noventa e nove mil, novecentos e noventa e nove números diferentes.

10. As classes de unidades. As classes de unidades que receberam até o presente, denominações especiais, são onze:

1. Classe das unidades simples.
2. » » » de milhar.
3. » » » » milhão.
4. » » » » bilhão.
5. » » » » trilhão.
6. » » » » quatrilhão.
7. Classe das unidades de quintilhão.
8. » » » » sextilhão.
9. » » » » septilhão.
10. » » » » octilhão.
11. » » » » nonilhão. (*)

Já vimos de que modo se denominaram as unidades das três primeiras classes. Fácil é, portanto, denominar as unidades das oito classes seguintes.

Cada classe é constituída, invariavelmente, por ***três ordens de unidades***, a saber: *unidades*, *dezenas* e *centenas*.

11. Os defeitos da numeração falada. Todos os povos da terra não falam a mesma língua. Portanto, nós, os brasileiros, não temos obrigação de entender o número ***three hundred and sixty-five***, escrito em inglês. Também os inglêses não têm obrigação de entender o número ***trezentos e sessenta e cinco***. Logo, a numeração falada tem êste primeiro defeito: ***não é universal***. Mas êste defeito é inevitável.

O segundo defeito é tornar quasi impossíveis as operações sôbre os números, que precisariam ser feitas mentalmente.

Para evitar êstes dois inconvenientes convencionou-se representar todos os números por meio de *sinais gráficos* chamados *algarismos*.

> **Algarismos são sinais gráficos por meio dos quais se representam todos os números.**

Os algarismos são nove: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Êstes algarismos são chamados ***arábicos***, porque se admite que foram

(*) As classes que se seguem, em número ilimitado, não receberam, por desnecessário, denominações especiais.

inventados pelos árabes. Veremos adiante (§ 12) que foi necessário inventar mais um algarismo.

12. Numeração escrita ou escritura dos números. Inventaram-se ***nove*** algarismos porque, em uma ordem qualquer há, no máximo, ***nove*** unidades, visto ser *dez* a base do nosso sistema de numeração. Entretanto, se a sucessão dos números naturais é infinita, como representá-los todos, apenas, com ***nove*** algarismos? Estabelecendo o seguinte princípio, ao qual chamaremos ***princípio fundamental da numeração decimal escrita:*** *um algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vêzes mais do que valeria se estivesse no lugar dêste outro.*

Primeiro exemplo. Escrever com algarismos o número *quatro mil setecentos e sessenta e três.* Êste número é constituído por quatro espécies de unidades, a saber: *três* unidades simples, *seis* dezenas, *sete* centenas e *quatro* unidades de milhar. Então representaremos as *três* unidades pelo algarismo 3, as *seis* dezenas pelo algarismo 6 à esquerda do 3, as *sete* centenas pelo algarismo 7 à esquerda do 6, e as *quatro* unidades de milhar pelo algarismo 4 à esquerda do 7. Portanto, o número *quatro mil setecentos e sessenta e três* ficará representado de um modo simples e universal, da seguinte maneira: 4 763.

Segundo exemplo. Escrever com algarismos o número *quatro mil e sessenta e três.*

Procedendo-se como acima, surge uma dificuldade. Êste número não tem centenas e o algarismo 4 à esquerda do 6 não representará unidades de milhar, porém centenas. Para remover esta dificuldade, inventou-se mais um algarismo, o algarismo 0 (zero) o qual indica falta de unidades em uma ordem qualquer. Portanto, o número quatro mil e sessenta e três ficará assim representado: 4 063.

13. A sucessão dos números inteiros. Um menino tem dois cruzeiros; comprando uma fruta que lhe custa esta quantia, fica sem dinheiro; diremos em Matemática que fica com ***zero cruzeiros. Zero*** é também um número, *mas não é um número natural.* Antepondo o número *zero* à sucessão dos números naturais, teremos a ***sucessão dos números inteiros, a saber:***

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\ldots\ldots \infty$$

14. Regra para escrever um número inteiro. Podemos agora estabelecer a seguinte

Regra. *Para escrever um número inteiro qualquer, escrevem-se os algarismos que representam as unidades de cada uma das ordens, da esquerda para a direita, começando pelas unidades de ordem mais elevada. A falta de unidades de primeira ordem ou de uma ordem intermediária qualquer será indicada pelo algarimos* 0 (zero).

15. Os algarismos e seus valores. Os algarismos são ***nove.*** Juntando-lhes o 0 (zero), o número de algarismos arábicos se eleva a ***dez.*** Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 são chamados ***algarismos significativos.***

Um algarismo tem dois valores: ***absoluto*** ou ***nominal*** e ***relativo*** ou ***local.*** Valor absoluto ou nominal de um algarismo é o valor que êle tem quando está isolado. Valor relativo ou local de um algarismo é o valor que êle tem de acôrdo com o lugar que ocupa em um número qualquer; *é um valor de posição.* Consideremos o número 37 645. Êste número é constituído pelos algarismos 3, 7, 6, 4 e 5, cujos valores absolutos e relativos são:

algarismo	5 —	valor	absoluto,	5;	valor	relativo,	5
»	4 —	»	»	4;	»	»	40
»	6 —	»	»	6;	»	»	600
»	7 —	»	»	7;	»	»	7 000
»	3 —	»	»	3;	»	»	30 000

16. Leitura de um número inteiro. ***Regra.*** *Para ler um número inteiro qualquer, é necessário dividí-lo em classes de três algarismos, da direita para a esquerda. Em seguida, dá-se à cada classe a denominação que lhe compete. Depois lê-se o número, da esquerda para a direita, dizendo o nome de cada uma das classes.*

Como exemplo, vamos ler o número 74508693729. De acôrdo com a regra, teremos:

un. de bilhão	un. de milhão	un. de milhar	un. simples
74	508	693	729

Em seguida leremos: 74 bilhões, 508 milhões, 693 mil e 729.

17. Conseqüências da numeração escrita. Escrevendo-se um zero à direita de um número, êste fica multiplicado por dez porque, de acôrdo com o princípio fundamental da numeração decimal escrita, o valor relativo de cada algarismo se torna ***dez vêzes*** maior. Seja o número 37. Escrevendo um zero à direita dêste número, teremos 370 que é ***dez vêzes*** maior do que 37 porque o algarismo 3, que representava dezenas, passou a representar centenas e o algarismo 7, que representava unidades, passou a representar dezenas. Logo,

Para multiplicar um número qualquer por 10, 100, 1 000, *etc., é bastante acrescentar-lhe um, dois, três, etc., zeros, à direita.*

Entretanto, à esquerda de um número podemos escrever zeros à vontade; 37 ou 037 ou 0 037 ou 00 037 é a mesma coisa.

18. Base de um sistema de numeração. *Base de um sistema de numeração é o número de unidades de uma ordem qualquer, necessário para formar uma unidade da ordem imediatamente superior.*

O sistema de numeração que usamos é o sistema de base *dez* ou *decimal.*

Parece que a humanidade adotou a ***base dez*** por influência dos dez dedos das nossas mãos. Entretanto, a base do sistema poderia ser ***oito*** ou ***nove*** ou ***onze*** ou ***seis,*** etc.. Donde se conclui que há uma infinidade de sistemas de numeração, conforme a base adotada. Mas o sistema universalmente adotado é o sistema decimal, isto é, ***de base igual a dez.***

Estudaremos mais tarde outros sistemas de numeração.

Os dez primeiros números naturais são chamados ***dígitos.***

Um número natural pode ser *ordinal* ou *cardinal.* É ordinal quando responde à pergunta ***qual?*** Qual é o meu chapéu? É o ***sétimo.*** É cardinal quando responde à pergunta ***quantos?*** Quantos são os chapéus? São ***sete.***

Exercícios orais

N. B. Nesta série de exercícios não é permitido efetuar divisões.

1. Quantas dezenas contém o número 645?

Solução. O número 645 contém 6 centenas, 4 dezenas, e 5 unidades. Uma centena é o mesmo que 10 dezenas; portanto, 6 centenas correspondem a 60 dezenas e teremos:

$$645 = 60 \text{ dezenas} + 4 \text{ dezenas} + 5 \text{ unidades.}$$

E, desde que 5 unidades não podem constituir uma dezena, conclui-se que o número 645 contém 64 dezenas e 5 unidades.

Pràticamente, é bastante suprimir mentalmente o algarismo 5 e, lembrando que o algarismo 4 representa dezenas, responder: ***64 dezenas.***

2. Quantas centenas contém o número 3 748?

Solução. Êste número contém 3 unidades de milhar, 7 centenas, 4 dezenas e 8 unidades. Uma unidade de milhar vale 10 centenas; 3 unidades de milhar valem 30 centenas; logo,

3 748 = 30 centenas + 7 centenas + 4 dezenas + 8 unidades
3 748 = 37 centenas + 4 dezenas + 8 unidades

E desde que 4 dezenas + 8 unidades valem 48 unidades e não podem portanto, constituir uma centena, conclui-se que o número 3 748 contém 37 centenas e 48 unidades.

Pràticamente, é bastante suprimir mentalmente os algarismos 8 e 4 que representam unidades e dezenas e, lembrando que o algarismo 7 representa centenas, responder: ***37 dezenas.***

3. Quantas dezenas contém o número 54?
4. Quantas dezenas contém o número 341?
5. Quantas dezenas contém o número 2 379?
6. Quantas centenas contém o número 6 307?
7. Quantas centenas contém o número 1 058?
8. Quantas dezenas contém o número 3 482?
9. Quantas unidades de milhar contém o número 57 493?
10. Quantas centenas contém o número 38 927?
11. Quantas dezenas de milhar contém o número 685 312?
12. Quantas unidades de milhar contém o número 87 699?
13. Quantas centenas contém o número 9 807?
14. Quantas dezenas contém o número 1 070?
15. Quantas unidades contém o número 387?
16. Quantos decâmetros há em 748 metros?

Solução. Um decâmetro tem 10 metros; é, portanto uma dezena de metros. Logo, 748 metros = 74 decâmetros e 8 metros.

17. Quantos hectômetros há em 3 629 metros?
18. Quantos quilômetros há em 8 574 metros?
19. Quantos quilômetros há em 37 256 metros?
20. Quantos quilômetros há em 74 630 metros?
21. Quantos hectômetros há em 12 345 metros?
22. Quantos decâmetros há em 6 084 metros?
23. Tenho Cr$ 7,80 em moedas de 10 centavos. Quantas são as moedas?
24. Tenho Cr$ 43,80 em moedas de um cruzeiro. Quantas são as moedas?
25. Tenho Cr$ 638,00 em notas de 10 cruzeiros. Quantas são as notas?
26. Tenho Cr$ 1 374,00 em notas de 100 cruzeiros. Quantas são as notas?
27. Tenho Cr$ 3,70 em moedas de 10 centavos. Quantas são as moedas?
28. Quantos automóveis são necessários para transportar os 347 alunos de um colégio, se cada automóvel pode transportar sòmente 10 alunos?

29. Quantos trens são necessários para transportar 34 758 soldados, se a lotação de cada trem é de 1 000 soldados?

30. Quantos vagões são necessários para transportar 8 349 estudantes, se cada vagão pode transportar, no máximo, 100 estudantes?

31. Ler o número 7 458 693 dizendo e aplicando a regra.

32. Mesmo exercício com o número 3 745 808 333.

33. Ler o número 47 508 enunciando cada algarismo por sua vez e dizendo, ao mesmo tempo, quais as unidades representadas por cada um dêles.

Solução. 4 dezenas de milhar, 7 unidades de milhar, 5 centenas e 8 unidades.

34. Mesmo exercício com o número 172 839.

35. Mesmo exercício com o número 84 077 366.

36. Mesmo exercício com o número 341 088 729 664.

37. Ler o número 8 793 529, separando-o assim: 8—79—35—29.

38. Idem, separando-o assim: 87—93—52—9.

39. Idem, separando-o assim: 879—3—529.

40. Idem, separando-o assim: 8—793—5—29.

41. Idem, separando-o assim: 8—7—93—529.

42. Quantos são os números constituídos por um algarismo? Qual o menor? E o maior? Quantos algarismos são necessários para escrevê-los?

43. Quantos são os números constituídos por dois algarismos? Qual o menor? E o maior? Quantos algarismos são necessários para escrevê-los?

44. Quantos são os números constituídos por três algarismos? Qual o menor? E o maior? Quantos algarismos são necessários para escrevê-los?

45. Quantos são os números constituídos por quatro algarismos? Qual o menor? E o maior? Quantos algarismos são necessários para escrevê-los?

46. Quantos são os números dígitos? Qual o menor? E o maior?

Exercícios. Série I

1. Quem escreveu desde 1 até 99, quantos algarismos escreveu?

2. Um menino escreveu todos os números de um, dois e três algarismos. Quantos algarismos escreveu?

3. Quantos tipos são necessários para numerar as 87 páginas de um livro, sem empregar duas vêzes o mesmo tipo?

4. Um menino escreveu a sucessão dos números naturais, desde 1 até 234. Quantos algarismos escreveu?

5. Um tipógrafo precisou de 159 tipos para numerar as páginas de um livro. Quantas páginas tinha êste livro?

6. Quantos tipos são necessários para numerar as 348 páginas de um livro, sem empregar duas vêzes o mesmo tipo?

7. Quantos algarismos são necessários para escrever a sucessão dos números naturais desde 50 até 3 500?

8. Um menino escreveu a sucessão dos números naturais desde 1 até 4 528. Quantos algarismos escreveu?

9. Um tipógrafo precisou de 1 500 tipos para numerar as páginas de um livro. Quantas páginas tinha êste livro?

10. Um menino, escrevendo a sucessão dos números naturais, parou depois de ter escrito 1 008 algarismos. Qual foi o último algarismo escrito?

19. Algarismos romanos. Os algarismos romanos são as letras I, V, X, L, C, D e **M**, cujos valores respectivos são ***1, 5, 10, 50, 100, 500*** e ***1000.***

O quadro que se segue nos mostra como escrever, com algarismos romanos, as unidades simples, as dezenas e as centenas.

100 — C	10 — X	1 — I
200 — CC	20 — XX	2 — II
300 — CCC	30 — XXX	3 — III
400 — CD	40 — XL	4 — IV
500 — D	50 — L	5 — V
600 — DC	60 — LX	6 — VI
700 — DCC	70 — LXX	7 — VII
800 — DCCC	80 — LXXX	8 — VIII
900 — CM	90 — XC	9 — IX

Para escrever um número qualquer de dois ou três algarismos é bastante substituir, neste número, o valor relativo de cada algarismo, pelo valor tirado do quadro acima. Portanto,

35	se escreverá		XXXV
89	»	»	LXXXIX
235	»	»	CCXXXV
704	»	»	DCCIV
936	»	»	CMXXXVI

Os números 1 000, 2 000 e 3 000 serão representados por M, MM e MMM. Entretanto, para escrever 4 000 não poderemos escrever MMMM porque ***não se deve reunir mais de três algarismos romanos iguais.*** Remove-se então a dificuldade com a seguinte convenção: *colocando-se um traço horizontal sôbre um número escrito com algarismos romanos, êste número fica multiplicado por mil.* Graças a esta convenção, $\overline{\text{V}}$ significa 5 000, $\overline{\text{XII}}$ significa 12 000, $\overline{\text{CVI}}$ significa 106 000, etc..

20. A adição; definições. *A adição é a operação que tem por fim reunir em um só número as diferentes espécies de unidades de que são formados dois ou mais números.*

Sejam os números 347, 528 e 49. Já sabemos que:

$$
\begin{aligned}
347 &= 3 \text{ centenas} + 4 \text{ dezenas} + 7 \text{ unidades} \\
528 &= 5 \text{ centenas} + 2 \text{ dezenas} + 8 \text{ unidades} \\
49 &= \phantom{5 \text{ centenas} +{}} 4 \text{ dezenas} + 9 \text{ unidades}
\end{aligned}
$$

A adição tem por fim formar um número que contenha as unidades dos números 347, 528 e 49, assim como as dezenas e as centenas dêstes mesmos números.

Os números que se somam são chamados *parcelas;* o resultado da adição é chamado *soma*. A adição é indicada pelo sinal + que se lê *mais*. As parcelas também são chamadas ***adendos.***

A palavra *soma* designa também a adição apenas indicada ou não efetuada de dois ou mais números. Por exemplo, a expressão $36 + 48 + 256$ é também chamada *soma*.

21. Algumas propriedades da adição. ***I.*** *A ordem das parcelas não influi na soma.* Com efeito, se quisermos reunir em uma única classe, os alunos de três classes que contêm respectivamente, 37, 42 e 46 alunos, é evidente que tanto faz reunir a primeira classe com a segunda e estas duas com a terceira, como reunir a terceira com a segunda e estas duas com a primeira; o número de alunos da nova classe será sempre o mesmo. Dizemos, em Matemáticam que ***a adição é uma operação comutativa.***

II. *Quando as parcelas são muitas, podemos separá-las em grupos, somar as parcelas de cada um dêstes grupos, e depois somar as somas parciais obtidas.* Por exemplo:

$$23 + 51 + 12 + 18 + 43 + 37 = 74 + 30 + 80 = 184$$

Eis por que dizemos, em Matemática, que ***a adição é uma operação associativa.***

Para indicar, com maior clareza, que a adição é associativa, podemos recorrer aos *parênteses*.

> **Os parênteses indicam que devemos considerar o que está dentro dêles como *um número único*, resultante das operações indicadas em seu interior.**

Por exemplo, $4 + (5 + 6)$ significa que, ao número 4, devemos somar o número 11, resultado da adição indicada dentro dos parênteses.

Observação. Estudaremos oportunamente (§42) as regras para eliminar parênteses.

Graças aos parênteses, podemos indicar a propriedade associativa da adição, assim:

$$3+4+5+6+7+8+9 = (3+4)+(5+6)+(7+8)+9$$
$$= (3+4+5)+(6+7+8+9) \text{ etc..}$$

E, de um modo geral,

$$a+b+c+d+e+f=(a+b)+(c+d)+(e+f)$$
$$=(a+b+c)+(d+e+f) \text{ etc.. (*)}$$

Se é permitido *associar* parcelas, torna-se evidente que é também permitido *dissociá-las* (**), isto é, substituir uma parcela por duas ou mais cuja soma seja igual à parcela que se quer substituir. A dissociação de parcelas nos permite, às vêzes, somar mentalmente dois ou mais números dados. Por exemplo,

$$43 + 57 + 64 = 40 + 3 + 50 + 7 + 60 + 4$$
$$= 40 + 50 + 60 + 3 + 7 + 4$$
$$= 150 + 14 = 164$$

III. As parcelas devem ser quantidades homogêneas. Por exemplo, 14 laranjas + 25 laranjas + 22 laranjas = 61 laranjas. Entretanto, 25 laranjas + 22 pessêgos = ? É evidente que não podemos somar 25 laranjas com 22 pêssegos, porque estas quantidades são *heterogêneas.*

IV. A soma e as parcelas são sempre da mesma espécie.

V. Se uma das parcelas aumenta ou diminui, por exemplo, de 36 *unidades, a soma também aumenta ou diminui destas mesmas* 36 *unidades.*

Observação. A adição de dois ou mais números naturais *é uma operação sempre possível, cujo resultado é também um número natural,* ***único e determinado.*** A prática da adição se aprende na escola primária. Os srs. professores poderão convidar seus alunos para enunciarem, de um modo correto, a regra geral da adição; a questão será proposta com 24 horas de antecedência e os estudantes que se saírem bem desta prova, serão recompensados com uma nota 10 de aplicação.

Ao mesmo tempo farão um ótimo exercício de linguagem.

22. Provas da adição. *Prova de uma operação é uma segunda operação que se faz para verificar a exatidão da primeira.*

A melhor prova da adição consiste em efetuar novamente esta operação, *porém de baixo para cima.* (§ 21, I) Quer na escola,

---

(*) Os alunos devem habituar-se, quanto mais cedo possível, ao emprêgo das letras, em Aritmética.

(**) Êste têrmo, eu pedí licença para empregá-lo, quando escreví a 1.ª edição do meu *Terceiro Ano de Matemática*, em janeiro de 1934. Últimamente, tenho-o encontrado em excelentes autores.

II. Subtraindo-se o mesmo número do minuendo e do subtraendo, o resto não se altera.

III. Somando-se um número qualquer ao minuendo, o resto fica aumentado dêste mesmo número.

IV. Somando-se um número qualquer ao subtraendo, o resto fica diminuído dêste mesmo número.

V. Subtraindo-se um número qualquer do minuendo, o resto fica diminuído dêste mesmo número.

VI. Subtraindo-se um número qualquer do subtraendo, o resto fica aumentado dêste mesmo número.

Em resumo: quando o minuendo ***aumenta*** ou ***diminui***, o resto também ***aumenta*** ou ***diminui;*** quando o subtraendo ***aumenta*** ou ***diminui***, o resto ***diminui*** ou ***aumenta.***

N. B. Estas propriedades podem ser verificadas por meio de exemplos.

Observação. A subtração de números naturais é uma operação possível *sòmente quando o minuendo é maior que o subtraendo, sendo o resultado um número natural,* único e determinado. Quando o minuendo é igual ao subtraendo, o resto é zero; logo, se a diferença de dois números é igual a zero, os dois números são iguais.

Quando o minuendo é menor que o subtraendo, a subtração não é possível, *no campo dos números naturais.* A prática da subtração se aprende na escola primária. A regra geral desta operação também pode ser objeto de concurso entre os estudantes. (§21, observação final)

25. Provas da subtração. A melhor prova da subtração consiste em somar o subtraendo com o resto. A soma deve ser igual ao minuendo.

No exemplo ao lado, o resto somado com o subtraendo reproduz o minuendo. Na prática, é inútil escrever novamente o número 37 508. Quer na escola, quer na vida prática, todo o indivíduo que realiza uma subtração *deve* cuidadosamente verificar a operação feita, somando o subtraendo com o resto.

$$\begin{array}{r} 37\,508 \\ 13\,493 \\ \hline 24\,015 \\ \hline 37\,508 \end{array}$$

Outra prova da subtração consiste em substituir o subtraendo pelo resto. O segundo resto deve ser evidentemente igual ao primeiro subtraendo.

$$\begin{array}{r} 37\,508 \\ 24\,015 \\ \hline 13\,493 \end{array}$$

Voltando ao exemplo acima, vamos subtrair o resto obtido, isto é, 24 015, do mesmo minuendo 37 508. O resto é 13 493, isto é, o subtraendo da primeira operação.

Exercícios orais

Nos exercícios que se seguem (*) os estudantes deverão substituir a letra x pelos valores convenientes.

1. $x - 8 = 9$	**5.** $x - 15 = 7$	**9.** $x - 13 = 12$	**13.** $x - 15 = 8$
2. $15 - x = 6$	**6.** $18 - x = 11$	**10.** $23 - x = 12$	**14.** $30 - x = 19$
3. $x - 13 = 16$	**7.** $x - 12 = 18$	**11.** $x - 15 = 17$	**15.** $x - 9 = 21$
4. $30 - x = 17$	**8.** $24 - x = 8$	**12.** $25 - x = 11$	**16.** $26 - x = 17$

Para subtrair mentalmente um número com dois algarismos, de outro número também com dois algarismos, é preferível subtrair primeiramente as dezenas do subtraendo e, depois, as unidades simples. Por exemplo:

$$74 - 37 = 74 - 30 - 7 = 44 - 7 = 37$$

Efetuar as subtrações que se seguem.

17. $75 - 32$	**19.** $65 - 48$	**21.** $59 - 23$	**23.** $62 - 36$
18. $87 - 54$	**20.** $59 - 36$	**22.** $27 - 18$	**24.** $71 - 29$

Para subtrair 9 ou 99 ou 999, etc., é preferível subtrair 10 ou 100 ou 1 000, etc., e somar uma unidade ao resultado. Por exemplo:

$$47 - 9 = 47 - 10 + 1 = 37 + 1 = 38$$

Efetuar as subtrações que se seguem.

25. $37 - 9$	**27.** $143 - 99$	**29.** $314 - 99$	**31.** $3\,526 - 999$
26. $58 - 9$	**28.** $215 - 99$	**30.** $473 - 99$	**32.** $4\,738 - 999$

Exercícios. Série II

Calcular o valor de x, nas igualdades que se seguem.

1. $37\,428 - x = 19\,587$	**5.** $x + 7\,899 = 10\,001$
2. $x - 48\,613 = 69\,597$	**6.** $2x + 347 = 675$
3. $41\,304 - x = 28\,786$	**7.** $613 + 2x = 931$
4. $37\,548 + x = 84\,201$	**8.** $6\,420 - 2x = 3\,578$

N. B. Para responder às questões que se seguem, o aluno deverá efetuar sòmente uma operação.

9. $734 - 527 = 207$. Somando-se 36 ao minuendo e 27 ao subtraendo o resto aumenta ou diminui? De quanto?

10. $734 - 527 = 207$. Subtraindo-se 43 do minuendo e 58 do subtraendo, o resto aumenta ou diminui? De quanto?

11. $734 - 527 = 207$. Somando-se 58 ao minuendo e subtraindo-se 38 do subtraendo, o resto aumenta ou diminui? De quanto?

12. $734 - 527 = 207$. Subtraindo-se 33 do minuendo e somando-se 47 ao subtraendo, o resto aumenta ou diminui? De quanto?

(*) Êstes exercícios são muito usados nos cursos primários, para que os estudantes aprendam bem as relações existentes entre o *minuendo*, o *subtraendo* e o *resto*, assim como entre as *parcelas* e a *soma*. A mesma observação se aplica aos exercícios das séries IV e VII e a outras dêste compêndio.

26. Expressão aritmética. Mário resolveu um dia ***brincar de banqueiro*** com seus companheiros de classe. Iniciou ***as suas operações bancárias*** com Cr\$ 10,00. Antônio depositou Cr\$ 7,00 no ***banco.*** Entretanto, Benedito ***sacou*** Cr\$ 8,00. Carlos, porém, entregou ao banqueiro Cr\$ 6,00. Mais tarde apareceu Décio que retirou do banco a quantia de Cr\$ 9,00. Mas, logo em seguida, Ernesto depositou Cr\$ 12,00 no banco. Finalmente Fábio, quasi na hora de fechar a caixa, retirou Cr\$ 5,00.

Encerrado o expediente, Mário ***o banqueiro,*** procedeu à verificação da caixa. Primeiramente efetuou as seguintes operações:

Cr\$ 10,00 em caixa	+	Cr\$ 7,00 de Antônio	=	Cr\$ 17,00 em caixa
Cr\$ 17,00 em caixa	−	Cr\$ 8,00 de Benedito	=	Cr\$ 9,00 em caixa
Cr\$ 9,00 em caixa	+	Cr\$ 6,00 de Carlos	=	Cr\$ 15,00 em caixa
Cr\$ 15,00 em caixa	−	Cr\$ 9,00 de Décio	=	Cr\$ 6,00 em caixa
Cr\$ 6,00 em caixa	+	Cr\$ 12,00 de Ernesto	=	Cr\$ 18,00 em caixa
Cr\$ 18,00 em caixa	−	Cr\$ 5,00 de Fábio	=	Cr\$ 13,00 em caixa

Em seguida, Mário foi à caixa e, verificando a existência dos Cr\$ 13,00, ficou muito satisfeito com o seu trabalho.

As seis operações feitas por Mário podem ser indicadas da seguinte maneira:

$$10 + 7 - 8 + 6 - 9 + 12 - 5 \quad \text{(A)}$$

Chama-se a isto uma ***expressão aritmética.*** Portanto, ***expressão aritmética é um conjunto de números, separados uns dos outros por sinais que indicam as operações que se devem realizar com êstes números.*** (*) Consideremos as três expressões aritméticas seguintes:

$$7 + 8 + 5 + 10 + 13; \quad 37 - 24; \quad 10 + 7 - 8 + 6 - 9 + 12 - 5.$$

A primeira tem o nome particular de ***soma*** e a segunda, ***diferença;*** a terceira não tem nome particular.

Consideremos novamente a expressão (A).

Mário, para calcular o saldo existente em caixa, fez ***seis*** operações; ***três*** adições e ***três*** subtrações. Entretanto, bastariam apenas ***três*** operações, a saber: ***duas*** adições e ***uma*** subtração. Com efeito, deveria ***somar*** os Cr\$ 10,00 que já existiam em caixa, com as quantias depositadas por Antônio, Carlos e Ernesto; depois ***somar*** as quantias retiradas por Benedito,

(*) Aroldo Martini Zuccagni, *Ripetitorio di Matematica*, Manuali Hoepli, pág. 3. 1934,

Décio e Fábio; finalmente, ***subtrair*** a segunda soma da primeira. É evidente que chegaria ao mesmo resultado, isto é, Cr$ 13,00. Podemos então estabelecer a seguinte

Regra. *Para calcular uma expressão aritmética em que entram sòmente adições e subtrações, isto é,* ***operações de primeira espécie,*** *somam-se em primeiro lugar as quantidades que devem ser somadas, inclusive a primeira; depois somam-se as quantidades que devem ser subtraídas; em seguida, subtrai-se a segunda soma da primeira.*

Como exercício, vamos calcular o valor da expressão aritmética seguinte:

$$37 - 15 + 28 + 31 - 13 - 19 + 60 - 35$$

Teremos:

$$37 - 15 + 28 + 31 - 13 - 19 + 60 - 35 =$$
$$(37 + 28 + 31 + 60) - (15 + 13 + 19 + 35) =$$
$$156 - 82 = 74$$

Aos números que devem ser somados dá-se o nome de ***números aditivos;*** aos números que devem ser subtraídos dá-se o nome de ***números subtrativos.***

Exercícios. Série III

Calcular as seguintes expressões aritméticas:

1. $375 - 48 + 97 + 89 + 157 - 573 - 21 + 95$.
2. $6\,427 - 3 - 7 - 23 - 297 + 115 - 2\,578 - 3\,496 + 849$.
3. $2\,374 - 596 - 689 + 847 + 587 - 1\,234 - 386 + 879$.
4. $615 + 887 - 1\,236 - 2\,457 + 3\,878 + 4\,959 - 6\,274 + 8\,000$.
5. $20 - 8 + 9 - 10 + 11 - 12 + 13 - 14 + 15 - 16 + 17 - 18 + 19 - 20 + 7$.
6. $20 - 11 + 12 - 13 + 14 - 15 - 6 + 40$.

27. Igualdade. Consideremos as expressões aritméticas seguintes:

$$4 + 7 + 11 - 6 \text{ e } 30 - 18 + 9 - 5$$

Se calcularmos estas duas expressões aritméticas, acharemos para ambas o mesmo valor, isto é, 16. Dizemos em Aritmética que estas duas expressões, embora formadas de números diferentes, ***são iguais,*** e podemos escrever:

$$4 + 7 + 11 - 6 = 30 - 18 + 9 - 5$$

A êste conjunto constituído por duas expressões aritméticas que, sendo calculadas, conduzem ao mesmo resultado, dá-se o nome de ***igualdade.***

A primeira expressão, isto é, ***àquela que fica à esquerda*** do sinal de igualdade (=, *igual*) chama-se ***primeiro membro da igualdade.*** A segunda expressão, isto é, ***àquela que fica à direita*** do sinal de igualdade, chama-se ***segundo membro da igualdade.***

Igualdade é o conjunto constituído por duas expressões aritméticas que, sendo calculadas, conduzem ao mesmo resultado. (*)

Convém conhecer desde já, algumas propriedades das igualdades. Por exemplo, sendo

$$5 \times 6 = 10 \times 3$$

é evidente que

$$5 \times 6 + 7 = 10 \times 3 + 7$$
$$5 \times 6 - 8 = 10 \times 3 - 8$$

isto é:

Somando-se o mesmo número a ambos os membros de uma igualdade, ou dêles subtraindo-se o mesmo número, ***as duas somas ou as duas diferenças continuam a formar uma igualdade.***

Convém aprender também duas propriedades notáveis da igualdade, e que serão muito úteis na continuação dêste curso.

I. Propriedade simétrica. Sendo $a = b$, então $b = a$, isto é, dados dois números, e sendo o primeiro igual ao segundo, então o segundo é igual ao primeiro.

II. Propriedade transitiva. Sendo $a = b$ e $b = c$, então $a = c$, isto é, se dois números são iguais a um terceiro, são iguais entre si.

Exercícios. Série IV

1. Na igualdade $37 + 48 + x = 120$, qual é o valor de x?

2. Na igualdade $54 + 46 = x + 38$, qual é o valor de x?

3. Um operário trabalhou desde o dia 23 de março até o dia 28 de novembro. Quantos dias trabalhou?

4. Um automóvel percorre 42 quilômetros na primeira hora; na segunda percorre 8 quilômetros mais do que na primeira; na terceira percorre 8 quilômetros mais do que na segunda, e assim por diante. Qual é o espaço percorrido em 10 horas?

(*) Aroldo Martini Zuccagni, obra citada, pág. 37.

5. Dois sócios constituiram um capital de Cr$ 80 000,00. O primeiro entrou com Cr$ 54 700,00. Qual é a diferença entre os capitais de ambos?

6. Se eu tivesse mais Cr$ 548,00, poderia comprar um automóvel de Cr$ 7 236,00 e ficaria com Cr$ 329,00. Quanto tenho?

7. Dois meninos ganharam Cr$ 87,90. Se um dêles ganhou Cr$ 49,76 quanto ganhou mais do que o outro?

8. José tinha Cr$ 87,60. Comprou alguns livros por Cr$ 48,50, deu Cr$ 28,40 a Pedro e o restante a Raul. Quanto ganhou Pedro mais do que Raul?

28. Complemento aritmético. *Chama-se complemento aritmético de um número o que lhe falta para completar uma unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos dêsse número.*

Para calcular o compl. arit. de um número qualquer, por exemplo, de 743, é bastante subtraí-lo de 1 000. O compl. arit. de 2 537 é a diferença 10 000 — 2 537.

o compl. arit. de 7 é 3.
» » » » 46 é 54.
» » » » 378 é 622.
» » » » 2 537 é 7 463

Para calcular um compl. arit. adotamos a seguinte

Regra. *Subtrai-se cada algarismo do número dado, a partir da esquerda, de* ***nove****; o algarismo das unidades será subtraído de* ***dez****.*

Como exemplo, vamos calcular o compl. arit. de 2 537; 2 para 9, 7; 5 para 9, 4; 3 para 9, 6; 7 para 10, 3. O compl. arit. de 2 537 é 7 463. Se o número dado tem um ou mais zeros à direita, o primeiro algarismo significativo à direita será subtraído de 10, e os outros, de 9.

Por exemplo, qual o compl. arit. de 3 570? 3 para 9, ***6;*** 5 para 9, ***4;*** 7 para 10, ***3;*** 0 para 0, ***0.*** O compl. arit. de 3 570 é 6 430.

Exercícios orais

Dizer o compl. arit. de cada um dos números seguintes:

1. 3 716	**4.** 500	**7.** 16 716	**10.** 42 000
2. 25 008	**5.** 2 399	**8.** 437 600	**11.** 57 368
3. 7 430	**6.** 4 785	**9.** 20 009	**12.** 157 008

Com o emprêgo dos compls. arits., a subtração pode ser convertida em uma adição.

Calculemos, por exemplo, a seguinte diferença:

4 789 — 2 536

Evidentemente,

$$4\,789 - 2\,536 = 4\,789 + (10\,000 - 2\,536) - 10\,000 \quad \text{(B)}$$

A igualdade (B) nos diz que, para calcular a expressão (A), tomamos o minuendo, 4 789, somamos-lhe o compl. arit. do subtraendo, e da soma diminuímos uma dezena de milhar. Portanto,

$$4\,789 - 2\,536 = 4\,789 + 7\,464 - 10\,000 = 2\,253$$

A disposição prática desta operação é a seguinte:

$$\begin{array}{r} 4\,789\ + \\ \bar{1}7\,464 \\ \hline 2\,253 \end{array}$$

O símbolo $\bar{1}$ significa que esta unidade, (uma dezena de milhar) deve ser subtraída da soma. A soma das centenas é 12; escrevemos 2 e vai 1. Somando os milhares, diremos: 1 e 4, 5; 5 e 7, 12; vai 1, menos 1, zero.

Observação. Em lugar de $\bar{1}7\,464$, não devemos escrever $-17\,464$, porque, neste caso, todo o subtraendo deveria ser considerado como um número subtrativo.

29. A multiplicação; definições. *A multiplicação de um número inteiro, por outro número também inteiro, é a operação que tem por fim efetuar uma adição de tantas parcelas iguais ao primeiro, quantas são as unidades do segundo.* Isto quer dizer que multiplicar 47 por 5 é o mesmo que calcular a soma de 5 parcelas iguais a 47.

$$47 \times 5 = 47 + 47 + 47 + 47 + 47 \therefore 47 \times 5 = 235$$

Neste exemplo, o número *que se multiplica* ou que é tomado como parcela, isto é, o número 47, é chamado ***multiplicando;*** o número *pelo qual se multiplica*, isto é, o número que nos diz quantas são as parcelas, e que no nosso caso é o número 5, é chamado ***multiplicador.***

A multiplicação é indicada pelo sinal $\times$ que se lê *multiplicado por* ou então *vêzes*. Logo, 47×5 quer dizer 47 *multiplicado por* 5 ou 47 *vêzes* 5.

A palavra *produto* designa também a multiplicação apenas indicada, não efetuada, de dois números. Por exemplo, a expressão aritmética 7×8 tem o nome particular de *produto.*

Da definição da multiplicação (de números inteiros) se conclui que a multiplicação é uma adição de parcelas iguais. O multiplicando representa uma das parcelas; o multiplicador representa o número de parcelas; o produto representa a soma.

O multiplicando e o multiplicador são chamados *fatôres*. Um produto pode ser constituído por dois ou mais fatôres. A expressão aritmética $7 \times 5 \times 8 \times 4 \times 6$ é um produto, cujo valor se obtém multiplicando-se 7 por 5, em seguida multiplicando-se o resultado por 8, depois multiplicando-se o novo resultado por 4, e finalmente, multiplicando-se êste último resultado por 6.

Há uma diferença essencial entre parcelas e fatôres. ***Parcelas*** são números que se somam e ***fatôres*** são números que se multiplicam. Consideremos a seguinte igualdade:

$$3 \times 4 \times 5 \times 7 = 57 + 64 + 86 + 213$$

O primeiro membro é um ***produto;*** o segundo membro é uma ***soma.*** No primeiro membro todos os números são ***fatôres;*** no segundo membro todos os números são ***parcelas.***

Observação. Quando o multiplicador é 1, o produto é igual ao multiplicando. Com efeito, 3×1 é, por definição, igual a 3. Quando o multiplicando é 1, o produto é igual ao multiplicador. Com efeito, $1 \times 3 = 1+1+1=3$.

Quando o multiplicando é igual a *zero*, o produto é também igual a *zero;* é *nulo*. Com efeito, $0 \times 3 = 0+0+0=0$. Em geral, quando um dos fatôres é *nulo*, o produto *também* é nulo:

$$5 \times 0 = 0 \qquad 0 \times 0 = 0 \qquad 3 \times 0 \times 4 \times 5 = 0$$

A prática da multiplicação se aprende na escola primária. Façamos da regra geral desta operação, mais uma oportunidade para que os estudantes consigam uma nota 10 de aplicação. (§ 21, observação final)

30. Algumas propriedades da multiplicação. ***I.*** *Em um produto constituído por dois fatôres, podemos inverter a ordem dos mesmos, sem que o valor do produto se altere.*

$$\boxed{\begin{array}{c}1+1+1\\1+1+1\\1+1+1\\1+1+1\\1+1+1\end{array}}$$

Vamos provar que $3 \times 5 = 5 \times 3$. Já sabemos que 3×5 significa uma soma de 5 parcelas iguais a 3, isto é, $3+3+3+3+3$. (§29) No quadro ao lado cada linha horizontal representa cada uma das parcelas. E, para saber quanto é 3×5, basta contar tôdas as unidades dêste quadro. Contando por linhas horizontais, temos $3+3+3+3+3$, isto é, 3×5. Contando por linhas verticais temos $5+5+5$, isto é, 5×3. Mas, tanto faz contar por linhas verticais como por linhas horizontais; o número de unidades do quadro é sempre o mesmo. Logo, $3 \times 5 = 5 \times 3$.

E, de um modo geral podemos escrever:

$$\boxed{a \times b = b \times a} \ (*)$$

II. Em um produto constituído por três fatôres, podemos inverter a ordem dos dois últimos, sem que o valor do produto se altere.

Vamos provar que $3 \times 4 \times 6 = 3 \times 6 \times 4$. A nossa figura é um bloco retangular (**) constituído por muitos cubos. Vamos contá-los. A primeira camada horizontal inferior tem *três* carreiras, cada uma com *quatro* cubos. Portanto, tem 3×4 cubos. E, como as camadas horizontais são *seis,* o número total de cubos é $3 \times 4 \times 6$.

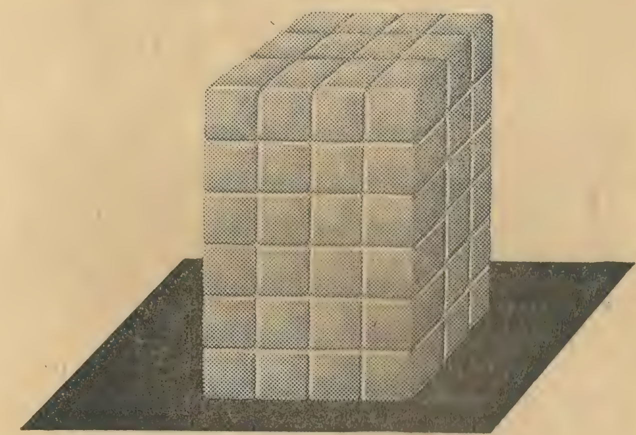


Fig. 1

A primeira camada vertical, à esquerda, tem *três* colunas. cada uma com *seis* cubos. Portanto, tem 3×6 cubos. E, como as camadas verticais são *quatro,* o número total de cubos é

(*) Aqui temos uma oportunidade para conversar com os nossos alunos sôbre o cálculo literal.

(**) Nas salas de aula deverá existir um bloco retangular de madeira ou cartolina cuja descrição ficará ao cuidado dos srs. professores.

$3 \times 6 \times 4$. Mas, quer contemos os cubos de um modo, quer os contemos de outro, o número total dêles é sempre o mesmo. Logo, $3 \times 4 \times 6 = 3 \times 6 \times 4$. E, de um modo geral, podemos escrever:

$$\boxed{a \times b \times c = a \times c \times b}$$

Para calcular o produto $3 \times 6 \times 4$, tanto faz multiplicar 3 por 6 e, depois, multiplicar o resultado por 4, como multiplicar 6 por 3 e, depois, multiplicar o resultado por 4. Logo,

$$3 \times 4 \times 6 = 3 \times 6 \times 4 = 6 \times 3 \times 4$$

E, de um modo geral,

$$\boxed{a \times b \times c = a \times c \times b = c \times a \times b}$$

Estamos vendo, portanto, que num produto constituído por três fatôres, podemos fazer com que o último fator fique em segundo lugar, ou em primeiro. Como se pode fazer o mesmo com qualquer um dos três fatôres, concluímos que, *num produto constituído por três fatôres, podemos inverter, à vontade, a ordem dos mesmos, sem que o valor do produto se altere.*

Facilmente se pode provar que esta verdade se aplica a um produto constituído por qualquer número de fatôres. Logo, *a multiplicação é, como a adição,* ***uma operação comutativa.***

III. Em um produto constituído por qualquer número de fatôres, podemos substituir dois ou mais dêstes fatôres, pelo seu produto efetuado.

Seja o produto $3 \times 5 \times 4 \times 6 \times 7$. Nele podemos substituir 5×6 pelo seu produto, 30. Com efeito, a multiplicação sendo comutativa, podemos escrever:

$$3 \times 5 \times 4 \times 6 \times 7 = 5 \times 6 \times 3 \times 4 \times 7$$

No segundo membro desta igualdade, é evidente que podemos substituir os dois primeiros fatôres, 5 e 6, pelo seu produto efetuado, 30. Logo,

$$3 \times 5 \times 4 \times 6 \times 7 = 30 \times 3 \times 4 \times 7$$

E lembrando mais uma vez que a multiplicação é comutativa, teremos:

$$3 \times 5 \times 4 \times 6 \times 7 = 3 \times 30 \times 4 \times 7$$

Logo, a multiplicação é, como a adição, ***uma operação associativa.***

Se a multiplicação é *associativa,* é também *dissociativa.*

Assim é que, em lugar de 25×12, podemos escrever $25 \times 4 \times 3$ ou $12 \times 5 \times 5$. Esta dissociação de fatôres nos permite efetuar mais facilmente certos produtos. Por exemplo,

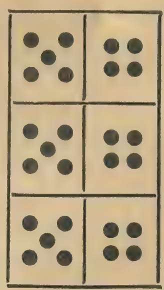
$$25 \times 12 = 25 \times 4 \times 3 = 100 \times 3 = 300$$
$$25 \times 12 = 12 \times 5 \times 5 = 60 \times 5 = 300$$

IV. Se quisermos multiplicar mentalmente 24 por 7, podemos decompôr 24 em duas parcelas, $20 + 4$, multiplicar cada uma das parcelas por 7, e somar os resultados. Assim,

$$24 \times 7 = (20 + 4) \times 7 = 20 \times 7 + 4 \times 7 = 140 + 28 = 168$$

Podemos verificar que êste processo de cálculo é legítimo, com a figura ao lado, a qual nos mostra claramente que:

$$9 \times 3 = (5 + 4) \times 3 = 5 \times 3 + 4 \times 3 = 15 + 12 = 27$$



Portanto, *para multiplicar uma soma por um número, podemos multiplicar cada uma das parcelas por êste número e, em seguida, somar os resultados.* E aprendemos assim, mais uma propriedade da multiplicação, isto é, *a multiplicação é uma operação distributiva em relação à adição.*

Observação. É fácil explicar o significado da palavra *distributiva.* Para calcular a expressão

$$(456 + 578 + 729 + 853) \times 648$$

o professor pode *distribuir* a tarefa entre quatro alunos, isto é, encarregar um dos alunos de calcular 456×648, dizer a outro que calcule 578×648; etc.. Em seguida, recebendo os quatro produtos, soma-os e terá o valor da expressão dada.

V. *O multiplicando é, em geral, um número concreto e o multiplicador é, em geral, um número abstrato.*

Queremos saber quanto custam 9 frangos a Cr$ 4,50 cada um. Temos de efetuar uma soma de 9 parcelas iguais a Cr$ 4,50 ou multiplicar Cr$ 4,50 por 9. O multiplicando é um número concreto, é ***4 cruzeiros e 5o centavos.*** O multiplicador é um número abstrato, é ***nove,*** não é ***nove frangos;*** o multiplicador ***nove*** está apenas indicando quantas vêzes o número ***Cr$ 4,50***

deve ser tomado como parcela. Seria um absurdo escrever ***Cr$ 4,50 × 9*** frangos.

VI. *O produto e o multiplicando são, em geral, da mesma espécie.* Assim deve ser, visto que a soma e as parcelas são sempre da mesma espécie. No exemplo acima, o produto, isto é, o preço dos 9 frangos é Cr$ 40,50.

31. Provas da multiplicação. Para tirar a prova de uma multiplicação, inverte-se a ordem dos fatôres e repete-se a operação. O segundo produto deverá ser igual ao primeiro.

Aprenderemos mais tarde outras provas da multiplicação.

Observação. A multiplicação de dois números naturais é uma adição abreviada: $25 \times 3 = 25 + 25 + 25$. Ora, a adição de números naturais, sendo sempre possível, e dando como resultado um número natural, único e determinado, concluímos que:

A multiplicação de números naturais é sempre possível, e dá como resultado um número natural, ***único e determinado.***

Exercícios orais

I. Para multiplicar um número inteiro por 10, 100, 1 000, etc., é bastante escrever um, dois, três, etc., zeros à direita dêste número.

II. Para multiplicar um número de dois algarismos, por um número dígito, é preferível multiplicar primeiramente as dezenas pelo número dígito, depois as unidades, e somar os dois produtos parciais. Por exemplo: $37 \times 4 = ?$ Para efetuar esta multiplicação, diremos: $30 \times 4 = 120$; $120 + 28 = 148$.

III. Para multiplicar um número inteiro com dois algarismos, por um número dígito seguido de zeros, multiplicamos o inteiro pelo número dígito e, à direita do produto, escrevemos tantos zeros quantos são os zeros do multiplicador. Assim, $47 \times 3\,000 = ?$ $47 \times 3 = 141$: $47 \times 3\,000 = 141\,000$.

IV. Multiplicar um número poe 10 é efetuar uma adição de 10 parcelas iguais a êste número; multiplicá-lo por 5 é efetuar uma adição de 5 parcelas. Portanto, para multiplicar um número por 5, podemos multiplicá-lo primeiramente por 10 e, em seguida, dividir o produto por 2. Assim,

$$37 \times 5 = 37 \times 10 \div 2 = 370 \div 2 = 185$$

V. Para multiplicar por 11, um número de dois algarismos, podemos adotar um processo interessante. Por exemplo: $34 \times 11 = ?$ A soma dos valores absolutos dos algarismos 3 e 4 é 7; colocamos o 7 entre o 3 e o 4 e teremos o produto de 34 por 11; $34 \times 11 = 374$. E $68 \times 11 = ?$ Somamos igualmente os algarismos 6 e 8; esta soma é 14; neste caso, escrevemos 4 entre 6 e 8 e aumentamos uma unidade às 6 centenas. Assim, $68 \times 11 = 748$.

Calcular mentalmente os produtos abaixo indicados.

1. 47 × 10	**9.** 37 × 8	**17.** 83 × 40	**25.** 74 × 5	**33.** 86 × 11
2. 325 × 10	**10.** 83 × 2	**18.** 27 × 90	**26.** 29 × 5	**34.** 73 × 5
3. 84 × 100	**11.** 36 × 20	**19.** 47 × 60	**27.** 23 × 11	**35.** 37 × 4
4. 3 × 1 000	**12.** 74 × 30	**20.** 73 × 5	**28.** 34 × 11	**36.** 76 × 11
5. 764 × 100	**13.** 85 × 40	**21.** 23 × 5	**29.** 42 × 11	**37.** 84 × 5
6. 53 × 7	**14.** 67 × 50	**22.** 34 × 5	**30.** 53 × 11	**38.** 66 × 11
7. 48 × 6	**15.** 49 × 60	**23.** 45 × 5	**31.** 74 × 11	**39.** 38 × 5
8. 75 × 4	**16.** 55 × 70	**24.** 56 × 5	**32.** 47 × 5	**40.** 44 × 7

41. 37 × 20	**47.** 320 × 40	**53.** 2 300 × 570
42. 40 × 30	**48.** 510 × 630	**54.** 6 400 × 800
43. 52 × 40	**49.** 720 × 400	**55.** 7 000 × 440
44. 70 × 56	**50.** 250 × 700	**56.** 5 000 × 586
45. 80 × 70	**51.** 800 × 458	**57.** 7 074 × 605
46. 65 × 30	**52.** 930 × 560	**58.** 3 296 × 7 000

32. Potência de um número. *Potência de um número é um produto de fatôres iguais a êste número.*

Segunda potência ou ***quadrado*** de um número é um produto de dois fatôres iguais a êste número. A segunda potência ou quadrado de 7 é 7 × 7, isto é, 49.

Terceira potência ou ***cubo*** de um número é um produto de três fatôres iguais a êste número. A terceira potência ou o cubo de 5 é 5 × 5 × 5, isto é, 125.

Quarta potência de um número é um produto de quatro fatôres iguais a êste número. A quarta potência de 3 é 3×3×3×3, isto é, 81. E assim por diante.

Observação. Por convenção, a primeira potência de um número é o próprio número. Por exemplo, a primeira potência de 5 é o próprio número 5.

Para indicar uma potência qualquer de um número, por exemplo, a oitava potência de 5, não é preciso escrever 5 × 5 × 5 × 5 × 5 × 5 × 5 × 5; é bastante escrever 5^8.

Para poupar tempo e espaço, ***convencionou-se*** escrever apenas uma vez o número 5 e, à direita dêste 5, um pouco acima e com algarismos menores, o número de vêzes que êste 5 deve ser tomado como fator. Portanto, a expressão aritmética 5^8 significa a oitava potência de 5. Anàlogamente,

13^4 significa a quarta potência de 13.
23^5 significa a quinta potência de 23.
32^7 significa a sétima potência de 32.

Consideremos agora as expressões aritméticas 13^4, 23^5 e 32^7. Já sabemos o que significam. Os números 13, 23 e 32 são chamados ***bases;*** os números 4, 5 e 7 são chamados ***expoentes.*** Portanto,

Base *é o número que se quer elevar a uma determinada potência; é o número do qual se pede uma potência qualquer.*

Expoente *é o número que se coloca à direita e um pouco acima da base, para indicar a que potência esta base deve ser elevada; para indicar quantas vêzes esta base deve ser tomada como fator.*

Observação. O expoente 1 não se escreve; 7^1 é o mesmo que 7; a primeira potência de 7 é 7. Entretanto, não esqueçamos que, ***quando nos convier, poderemos escrever*** 7^1 ***em lugar de 7;*** 8^1 ***em lugar de 8;*** etc..

Observemos desde já que qualquer potência da unidade é a própria unidade. Por exemplo:

$$1^3 = 1 \times 1 \times 1$$
$$1^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1, \text{ etc..}$$

Para multiplicar duas potências de um mesmo número, é bastante somar os expoentes. Exemplo:

$$\boxed{2^3 \times 2^5 = 2^8}$$

$$\text{Com efeito, } 2^3 \times 2^5 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2^8$$

E, de um modo geral,

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

Para multiplicar duas potências com o mesmo expoente, porém com bases diferentes, é bastante multiplicar as bases e dar ao produto, como expoente, o expoente de um dos fatôres. Exemplo:

$$\boxed{2^3 \times 5^3 = 10^3}$$

Com efeito, $2^3 \times 5^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$
$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$
$= 10 \times 10 \times 10$
$= 10^3$ (*)

Veremos adiante como se calcula o quociente de duas potências de uma mesma base. (§35)

Exercícios orais

Calcular as expressões aritméticas seguintes, dizendo por exemplo: $2^5 = 32$.

1. $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$.
2. $10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}$.
3. $20^1, 20^2, 20^3, 20^4, 20^5$.
4. $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$.
5. $30^1, 30^2, 30^3, 30^4, 30^5$.
6. $40^1, 40^2, 40^3, 40^4, 40^5$.
7. $5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5$.
8. $50^1, 50^2, 50^3, 50^4, 50^5$.
9. $60^2, 70^2, 80^2, 90^2, 100^2$.
10. $200^2, 300^2, 400^2, 500^2, 600^2$

11. Qual é a quinta potência de 10? De quantos algarismos se compõe? Quais são êles?
12. Qual é a sétima potência de 10? De quantos algarismos se compõe? Quais são êles?
13. Qual é a quarta potência de 10? De quantos algarismos se compõe? Quais são êles?
14. Qual a conclusão que podemos tirar dos exercícios 11, 12 e 13?
15. As expressões 7×2 e 7^2 são iguais? Por que?
16. Qual a diferença que existe entre 7×5 e 7^5?
17. Qual a diferença que existe entre 10×3 e 10^3?
18. Desenvolver as expressões 8×5 e 8^5.
19. Desenvolver as expressões 10×6 e 10^6.

Calcular mentalmente os produtos que se seguem.

20. 2×2^3
21. 2×2^4
22. $2^5 \times 2$
23. $2^2 \times 2^4$
24. $3^3 \times 3$
25. $3^2 \times 3^3$
26. $2^5 \times 5^5$
27. $3^2 \times 2^2$
28. $2^2 \times 2^3 \times 2$
29. $2^4 \times 5^4 \times 1^4$
30. $3^3 \times 3 \times 3^2$
31. $2^3 \times 5^3 \times 10^3$

Exercícios. Série V

1. Calcular a oitava potência de 5.
2. Calcular a sétima potência de 8.
3. Calcular a sexta potência de 9.
4. Calcular a quinta potência de 12.

(*) Esta regra e a anterior se justificam muito facilmente, com as leis comutativa e associativa da multiplicação.

5. Calcular a terceira potência de 32.
6. Calcular a segunda potência de 315.
7. Calcular a primeira potência de 3 784.
8. Calcular a trigésima potência de 1.

33. Expressões aritméticas. Para calcular expressões aritméticas em que entram adições, subtrações, multiplicações e divisões, é necessário efetuar em primeiro lugar as multiplicações e divisões, *na ordem em que estão indicadas,* e depois as adições e subtrações. Entretanto, se numa expressão aritmética entrarem potências, ***é necessário calcular em primeiro lugar estas potências.***

Primeiro exemplo:

$$7 + 3^4 \times 5 - 4 \times 5^2 \div 10 + 8 + 2^3 \times 7 - 20 =$$
$$7 + 81 \times 5 - 4 \times 25 \div 10 + 8 + 8 \times 7 - 20 =$$
$$7 + 405 - 100 \div 10 + 8 + 56 - 20 =$$
$$7 + 405 - 10 + 8 + 56 - 20 =$$
$$(7 + 405 + 8 + 56) - (10 + 20) =$$
$$476 - 30 = 446$$

Segundo exemplo:

$$2^6 \times 3^4 \div 6^3 + 5 \times 1^{100} - 4^3 \times 2 + 8^3 \div 4^3 + 5^3 =$$
$$64 \times 81 \div 216 + 5 \times 1 - 64 \times 2 + 512 \div 64 + 125 =$$
$$24 + 5 - 128 + 8 + 125 =$$
$$(24 + 5 + 8 + 125) - 128 = 162 - 128 = 34.$$

Exercícios. Série VI

1. $2^5 - 3^4 + 4^3 - 5^2 + 6^1 - 1^{50} + 10^2 =$
2. $8^3 \times 5^5 \div 10^2 - 2^3 \times 3^3 \times 5^3 + 12^3 \times 10^3 \div 15^3 - 18^{30} \times 0 + 27\,000 =$
3. $10^5 - 2^4 \times 3^5 \div 6^3 + 100^2 - 7^3 \times 9^2 \div 63^2 + 25^2 =$
4. $2^5 + 3^5 + 4^5 - 5^2 - 6^2 - 7^2 + 10^3 =$
5. $(12^3 + 24^2) \div 12 - 3^2 \times (2^5 + 3^5 - 274) + 10^3 =$
6. $(3 + 4 \times 5)^2 =$
7. $(5 \times 8 - 4 \times 3)^2 + (7 - 4 \times 5 + 14)^{10} =$
8. $(40 - 2^3 \times 5 + 2)^8 + 5 \times (7^2 - 6^2 - 3^2)^4 =$
9. $200 - (7 \times 5^2) + (15 + 5)^3 - (7 \times 8 \times 9 \times 0)^{50} =$
10. $(2^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3)^2 =$

34. A divisão; definições. PRIMEIRO PROBLEMA. *Uma senhora distribuiu* Cr \$ 10 750,00 *por* 25 *pobres. Quanto recebeu cada um?*

Para resolver êste problema, é necessário repartir Cr 10 750,00 em 25 partes iguais. Cada uma das partes obtidas é a quantia que toca a cada pobre.

```
10 750 | 25
    75   430
    00

R. 430 cruzeiros
```

A operação que se faz para saber quanto deve receber cada pobre é chamada divisão. Portanto, *a divisão é a operação que tem por fim repartir um número em partes iguais.*

SEGUNDO PROBLEMA. *Um criador gastou* Cr$ 10 750,00 *em carneiros que comprou a* 25 *cruzeiros cada um. Quantos carneiros comprou?*

Para resolver êste problema, é necessário calcular quantas vêzes Cr 10 750,00 contêm Cr$ 25,00. O número obtido representa, evidentemente, o número de carneiros.

```
10 750 | 25
    75   430
    00

R. 430 carneiros
```

A operação que se faz para verificar quantas vêzes Cr$ 10 750,00 contêm Cr$ 25,00, isto é, para saber qual o número de carneiros, é chamada divisão. Portanto, *a divisão é a operação que tem por fim verificar quantas vêzes um número está contido em outro.*

O primeiro número chama-se ***dividendo;*** o segundo, ***divisor;*** o resultado, ***quociente.***

Observemos que, no primeiro problema, o dividendo e o divisor ***são quantidades heterogêneas*** e efetuamos a divisão com o fim especial de repartir um número em partes iguais. O ***quociente é, neste caso, da mesma espécie do dividendo.***

No segundo problema, o dividendo e o divisor ***são quantidades homogêneas;*** a divisão teve o fim especial de verificar quantas vêzes um número está contido em outro. ***O quociente é, neste caso, de espécie diferente do dividendo;*** a espécie de unidades representada pelo quociente depende do problema.

Voltando ao primeiro problema, a quantia que cada pobre recebeu, a saber, Cr$ 430,00, sendo multiplicada pelo número de pobres, a saber, 25, deve reproduzir evidentemente a quantia distribuida, isto é, Cr$ 10 750,00.

Voltando ao segundo problema, o número de carneiros, a saber, 430, sendo multiplicado pelo preço de cada carneiro, a

saber, Cr$ 25,00, deve reproduzir evidentemente o preço de todos os carneiros, isto é, Cr$ 10 750,00.

Ora, desde que em ambos os casos, o quociente multiplicado pelo divisor reproduz o dividendo, conclui-se que:

> **A divisão é a operação que tem por fim, dados dois números naturais, achar um terceiro número natural que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro.**

Esta é a definição geral da divisão.

A divisão é indicada pelo sinal $\div$ ou por dois pontos (:).

Portanto, $24 \div 8$ ou $24 : 8$ significam a mesma coisa, isto é, ***24 dividido por 8.***

Já aprendemos que a subtração nem sempre é possível, no campo dos números naturais. (§24, Observação) Também a divisão, de acôrdo com a sua definição geral, nem sempre é possível no mesmo campo dos números naturais. Com efeito, dados dois números naturais numa certa ordem, a e b, e supondo $a > b$, nem sempre existe um terceiro número natural que, sendo multiplicado por b, reproduza o número a. Por exemplo, qual o quociente da divisão de 26 por 8? Não é 3, porque $3 \times 8 = 24$; não é 4, porque $4 \times 8 = 32$. E então?

35. Divisão exata e divisão aproximada. Quando são dados dois números naturais a e b, $a > b$ e existe um terceiro número natural, q, o qual multiplicado por b, reproduz o número a, dizemos que *a divisão de* a *por* b *é exata*. Por exemplo, a divisão de 36 por 4 é exata.

Mas, quando não existe um terceiro número natural que, multiplicado pelo número b, reproduza o número a, dizemos que *a divisão de* a *por* b *é aproximada*. Por exemplo, a divisão de 37 por 4 é aproximada.

Tomando um número qualquer, 11, e multiplicando-o sucessivamente por cada um dos números da sucessão dos números inteiros, todos os produtos obtidos, isto é,

$$11 \times 0,\ 11 \times 1,\ 11 \times 2,\ 11 \times 3,\ 11 \times 4,\ 11 \times 5,\ 11 \times 6,\ 11 \times 7, \ldots$$

são chamados ***múltiplos de*** **11.**

No caso da divisão exata teremos sempre:

$$\textit{dividendo} = \textit{divisor} \times \textit{quociente}$$

Observações. I. Da definição dada para a divisão *exata*, resulta que esta operação é o inverso da multiplicação. O que *fazemos* na multiplicação, *desfazemos* na divisão; o que *compomos* na multiplicação, *decompomos* na divisão. Eis por que a multiplicação é chamada *operação de composição* e a divisão é chamada *operação de decomposição*. E ambas são denominadas **operações de segunda espécie.**

E agora podemos estabelecer que: *Para se calcular o quociente de duas potências de uma mesma base, é bastante formar uma terceira potência cuja base seja a mesma das duas potências dadas e cujo expoente seja a diferença entre os expoentes das mesmas potências dadas.* Portanto,

$$2^7 \div 2^4 = 2^3 \qquad \text{porque} \qquad 2^3 \times 2^4 = 2^7$$

E, de um modo geral:

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

II. A divisão nem sempre é possível no campo dos números naturais. No caso da divisão aproximada, devemos aceitar, por enquanto, o quociente incompleto. Entretanto, veremos mais tarde que, mesmo neste caso, *existe sempre um terceiro número que, multiplicado pelo segundo, reproduz o primeiro;* mas, ***não será um número natural.***

III. De $5 \times 1 = 5$, resulta que $5 \div 5 = 1$ e $5 \div 1 = 5$, isto é, *quando o divisor é a unidade, o quociente é igual ao dividendo; quando o dividendo e o divisor são iguais, o quociente é a unidade.*

De $7 \times 0 = 0$, resulta que $0 \div 7 = 0$, isto é, *se o dividendo é zero, e o divisor é diferente de zero, o quociente é zero.*

A divisão de um número natural por *zero* carece de sentido. Por exemplo, $7 \div 0$ é uma operação sem sentido porque não existe um número natural que, multiplicado por *zero*, dê 7; o produto de *zero* por um *número natural* é *zero*.

De um modo geral, e sendo n um número natural, podemos escrever:

$$n \div 1 = n$$
$$n \div n = 1$$
$$0 \div n = 0$$

$$n \div 0 = ?$$

Operação impossível

Quando *o dividendo é um* ***múltiplo*** *do divisor*, a divisão é exata. Seja 55 o dividendo e 11, o divisor. O quociente exato da divisão de 55 por 11 é 5, porque 55 é múltiplo de 11.

Quando *o dividendo não é um* ***múltiplo*** *do divisor*, a divisão é aproximada. Seja 58 o dividendo e 11, o divisor. Não sendo 58 um múltiplo de 11, a divisão de 58 por 11 não é exata; não existe um terceiro número natural que, multiplicado por 11, reproduza o número 58. Com efeito, $11 \times 5 = 55$ e $11 \times 6 = 66$. Quando tal acontece, *devemos tomar como quociente* ***o maior número*** *que, multiplicado pelo divisor, dá um produto inferior ao dividendo.* No caso da divisão de 58 por 11, diremos que o quociente é 5, e daremos a êste quociente o nome de *quociente aproximado* ou ***quociente incompleto.***

Em resumo:

> ***Quociente exato*** **de dois números naturais a e b, sendo a múltiplo de b (ou $a = b$) é um terceiro número natural q, o qual, multiplicado pelo número b reproduz o número a.**

> ***Quociente incompleto*** **de dois números naturais a e b, não sendo a múltiplo de b, é o maior número natural q, o qual, multiplicado pelo número b dá um produto inferior ao número a.**

Observação. Veremos adiante (§114) comos e completa o quociente de uma divisão no caso em que o dividendo não é múltiplo do divisor.

36. O resto de uma divisão; igualdade fundamental. A divisão de 58 por 11 não é exata; é aproximada. O quociente incompleto é 5. Ora, $5 \times 11 = 55$ e $58 - 55 = 3$. A êste número, 3, damos o nome de ***resto*** da divisão aproximada.

***Resto** de uma divisão aproximada é a diferença que existe entre o **dividendo** e o produto do **divisor** pelo **quociente**.* Donde resulta que, no caso da divisão aproximada, teremos sempre a seguinte igualdade fundamental:

$$\textbf{dividendo} = \textbf{divisor} \times \textbf{quociente} + \textbf{resto}$$
$$(\textbf{resto} < \textbf{divisor})$$

37. Algumas propriedades da divisão. ***I.*** *A divisão sendo exata, se multiplicarmos o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera.*

Os estudantes podem verificar esta propriedade efetuando uma divisão qualquer, por exemplo, 216 ÷ 18 e, em seguida, multiplicar o dividendo e o divisor sucessivamente por 2, 3, 4, 5, 6, etc.. Verificarão assim que o quociente, 12, permanece inalterado.

No caso de uma divisão exata, também podemos dividir o dividendo e o divisor por um mesmo número, sem que o quociente se altere.

II. *A divisão sendo aproximada, se multiplicarmos o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera,* ***mas o resto fica multiplicado por êste mesmo número.***

Esta propriedade pode ser verificada como a anterior.

No caso de uma divisão aproximada, se dividirmos o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera, ***mas o resto fica dividido por êste mesmo número.***

III. *O resto é sempre da mesma espécie do dividendo.* Havendo resto, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, somado com o resto, isto é:

$$\textit{dividendo} = \textit{divisor} \times \textit{quociente} + \textit{resto}$$

Portanto, o dividendo é uma soma de duas parcelas. Ora, sendo a soma da mesma espécie das parcelas, conclui-se que o resto é sempre da mesma espécie do dividendo.

Por exemplo: repartindo laranjas, só podem sobrar laranjas; distribuindo cruzeiros, só podem sobrar cruzeiros; *se dividirmos* 13 *dezenas por* 5, *o quociente incompleto é* 2 *dezenas* e *restam* 3 *dezenas*, etc..

A prática da divisão se aprende na escola primária. E a sua regra geral é mais um bom tema para um concurso entre estudantes. (§ 21, observação final)

4

38. Provas da divisão. Para tirar a prova de uma divisão sem resto, é bastante multiplicar o quociente pelo divisor. O produto deverá ser igual ao dividendo.

Havendo resto, é preciso multiplicar o quociente pelo divisor e somar o produto com o resto. A soma deverá ser igual ao dividendo.

39. Multiplicação e divisão por 10, 100, 1 000, etc.. Já vimos (§17) como se multiplica um número inteiro qualquer por 10, 100, 1 000, etc.. Por exemplo, $57 \times 10 = 570$; $32 \times \times 100 = 3\,200$; $84 \times 1\,000 = 84\,000$, etc.. Inversamente, se um número tem zeros à direita, e queremos dividí-lo por 10, 100, 1 000, etc., é bastante suprimir um, dois, três, etc., zeros à direita. Por exemplo, $350 \div 10 = 35$, $4\,700 \div 100 = 47$, $81\,000 \div 1\,000 = 81$, etc..

Exercícios orais

1. $3 \times 10 =$	**4.** $750 \div 10 =$	**7.** $6\,400 \div 10 =$
2. $47 \times 100 =$	**5.** $6\,300 \div 100 =$	**8.** $3 \times 100 =$
3. $9 \times 1\,000 =$	**6.** $27\,000 \div 1\,000 =$	**9.** $72\,000 \div 100 =$

A divisão de um número natural por um número dígito pode ser feita mentalmente. Efetuar as divisões que se seguem, dizendo qual o resto, se o quociente fôr incompleto.

10. $3\,746 \div 2$	**14.** $3\,385 \div 3$	**18.** $1\,237 \div 6$	**22.** $1\,107 \div 3$
11. $5\,893 \div 2$	**15.** $7\,684 \div 4$	**19.** $3\,216 \div 4$	**23.** $1\,624 \div 4$
12. $6\,478 \div 2$	**16.** $2\,573 \div 5$	**20.** $5\,674 \div 5$	**24.** $1\,507 \div 5$
13. $7\,379 \div 2$	**17.** $6\,753 \div 5$	**21.** $4\,366 \div 7$	**25.** $4\,137 \div 3$

Dizer o primeiro algarismo, à esquerda do quociente, das divisões abaixo indicadas.

26. $2\,756 \div 47$	**29.** $5\,742 \div 77$	**32.** $3\,875 \div 39$
26. $4\,887 \div 56$	**30.** $6\,840 \div 88$	**33.** $4\,567 \div 59$
28. $2\,133 \div 68$	**31.** $2\,497 \div 29$	**34.** $5\,775 \div 79$

Efetuar mentalmente as divisões abaixo indicadas, dizendo qual o resto, se o quociente for incompleto.

35. $33 \div 11$	**38.** $44 \div 14$	**41.** $66 \div 11$	**44.** $72 \div 14$
36. $37 \div 12$	**39.** $47 \div 15$	**42.** $68 \div 12$	**45.** $75 \div 15$
37. $40 \div 13$	**40.** $51 \div 16$	**43.** $70 \div 13$	**46.** $78 \div 16$

40. Expressões aritméticas. Vimos em que consiste uma expressão aritmética e aprendemos a calcular expressões aritméticas em que entram apenas adições e subtrações. (§26)

Vejamos agora como calcular expressões em que entram as quatro operações já estudadas, a saber, adição, subtração, multiplicação e divisão, isto é, operações de primeira e de segunda espécies.

Para calcular expressões aritméticas desta natureza, é necessário obedecer invariavelmente à seguinte regra: ***em primeiro lugar efetuam-se as multiplicações e divisões***, isto é, *as operações de segunda espécie, e na ordem em que esão indicadas.* Feito isto, continua-se o cálculo de acôrdo com a regra do §26.

Primeiro exemplo. $4 + 7 \times 5 - 36 \div 4 + 8 + 3 \times 14 \div 7 - 8 \times 3 + 20 =$
$4 + 35 - 9 + 8 + 6 - 24 + 20 =$
$(4 + 35 + 8 + 6 + 20) - (9 + 24) =$
$73 - 33 = 40$

Segundo exemplo. $7 \times 3 - 8 + 32 \div 4 + 5 \times 9 - 6 \times 14 \div 21 - 5 \times 10 + 60 =$
$21 - 8 + 8 + 45 - 4 - 50 + 60 =$
$(21 + 8 + 45 + 60) - (8 + 4 + 50) =$
$134 - 62 = 72$

Exercícios. Série VII

Calcular o valor de x nas igualdades que se seguem.

1. $37 \times x = 333$ | **3.** $x \div 15 = 28$ | **5.** $437 = 32 \times 13 + x$
2. $8 \times 7 \times x = 280$ | **4.** $324 \div x = 9$ | **6.** $512 = 37 \times x + 31$
7. $648 = x \times 12 + 12$

8. $3+4\times5+6+7\times2\times8+9\times4+10\times11+12\times5\times3+8 =$
9. $20-3\times5+11+8+7\times4-2\times3\times4+20-8\times5+2\times3\times4\times5 =$
10. $18+24 \div 3\times8+7\times5-10\times3 \div 6+2\times3-7\times8 \div 14-3\times2 =$
11. $49\times8 \div 14-376\times0\times89+5\times7\times8-2\times3\times5+80 =$

41. Os parênteses em Aritmética. Consideremos a expressão aritmética seguinte: $7 + 8 \times 5 - 3 + 4 \times 6$. Para calculá-la temos de efetuar, em primeiro lugar, as multiplicações e divisões (§40) e depois aplicar a regra do §26. Teremos:

$$7+8\times5-3+4\times6=7+40-3+24=(7+40+24)-3=71-3=68$$

Consideremos agora a expressão aritmética seguinte:

$$(7 + 8) \times 5 - (3 + 4) \times 6$$

Para calcular esta expressão é necessário, em primeiro lugar, calcular as expressões $7 + 8$ e $3 + 4$. Teremos:

$$(7 + 8) \times 5 - (3 + 4) \times 6 = 15 \times 5 - 7 \times 6 = 75 - 42 = 33$$

Observação.** Se uma expressão aritmética está entre parênteses,* ***devemos entender que se consideram efetuadas as operações indicadas pela mesma expressão.

Portanto, quando uma expressão aritmética contém parênteses, é necessário, em primeiro lugar, calcular as expressões aritméticas parciais que estão entre parênteses e, em seguida, aplicar as regras indicadas no § anterior e neste.

Exemplo:

$$(9 + 4) \times 3 - 5 + (24 - 9) \div 5 - (7 + 8 + 6) \div 3 + 20 =$$
$$13 \times 3 - 5 + 15 \div 5 - 21 \div 3 + 20 =$$
$$39 - 5 + 3 - 7 + 20 = 62 - 12 = 50$$

Exercícios. Série VIII

1. $3+(7+8)\times5+(96-14)\div41-3\times2\times5+7\times(15+12-17) =$
2. $(4+8)\times5-7\times(13-4+5)+100-(45-13+20)+5\times4 =$
3. $7\times4+\left[8-3\times(10-6)+9\times4\right]-(9+4-6)\times5+100 =$
4. $500-\left[(9+4)\times2-3\times(8+5)+(11-7)\times10-2\times(8-5)\right] =$

42. Eliminação de parênteses. Dada uma expressão aritmética que contém parênteses, é necessário, às vêzes, suprimí-los. Vejamos como proceder neste caso.

I. É claro que $10 + (8) = 10 + 8$. Subtraindo-se 5 unidades da parcela (8), a soma diminui de 5 unidades. (§ 24, V) Portanto,

$$10 + (8 - 5) = 10 + 8 - 5$$

Somando-se 7 unidades à parcela $(8 - 5)$, a soma aumenta de 7 unidades. Portanto,

$$10 + (8 - 5 + 7) = 10 + 8 - 5 + 7$$

Subtraindo-se 3 unidades da parcela $(8 - 5 + 7)$, a soma diminui de 3 unidades. Portanto,

$$10 + (8 - 5 + 7 - 3) = 10 + 8 - 5 + 7 - 3$$

O exposto é suficiente para estabelecer a seguinte

Regra. *Quando uma expressão aritmética está entre parênteses e é precedida pelo sinal* ***mais****, os parênteses podem ser suprimidos, sem que o valor da expressão dada se altere.*

$$7 + (8 - 5) + (3 - 4 + 7) = 7 + 8 - 5 + 3 - 4 + 7$$

II. É claro que $20 - (12) = 20 - 12$. Subtraindo-se 5 unidades do subtraendo (12), o resto aumenta de 5 unidades. (§ 24, VI) Portanto,

$$20 - (12 - 5) = 20 - 12 + 5$$

Somando-se 8 unidades ao subtraendo $(12 - 5)$, o resto diminui de 8 unidades. (§ 24, IV) Portanto,

$$20 - (12 - 5 + 8) = 20 - 12 + 5 - 8$$

Subtraindo-se 3 unidades do subtraendo $(12 - 5 + 8)$, o resto aumenta de 3 unidades. Portanto,

$$20 - (12 - 5 + 8 - 3) = 20 - 12 + 5 - 8 + 3$$

O exposto é suficiente para estabelecer a seguinte

Regra. *Quando uma expressão aritmética está entre parênteses e é precedida pelo sinal* **menos,** *os parênteses podem ser suprimidos, sem que o valor da expressão dada se altere, contanto que se mude o sinal dos números que estão entre parênteses; os números aditivos se tornam subtrativos e os números subtrativos se tornam aditivos.*

$$20 - (15 - 7 + 3) - (8 - 6 + 9) = 20 - 15 + 7 - 3 - 8 + 6 - 9$$

Destas duas regras deduzimos mais duas propriedades notáveis para a subtração.

I. *Para, de um número dado, subtrair uma soma indicada de duas ou mais parcelas, subtraímos do número dado a primeira parcela; do resto subtraímos a segunda parcela; e assim sucessivamente.*

$$\boxed{\boldsymbol{n - (a + b + c + \ldots\ldots) = n - a - b - c - \ldots\ldots}}$$

Exemplo: $20 - (3 + 4 + 5 + 6) = 20 - 3 - 4 - 5 - 6 = 2$

II. *Para, de um número dado, subtrair uma diferença indicada, subtraímos do número dado o minuendo, e ao resto somamos o subtraendo; ou ao número dado somamos o subtraendo e, da soma subtraímos o minuendo.*

$$\boxed{\boldsymbol{n - (a - b) = n - a + b = n + b - a}}$$

Exemplo: $20 - (11 - 4) = 20 - 11 + 4 = 20 + 4 - 11 = 13$

Exercícios orais

Ler em voz alta, suprimindo os parênteses, as expressões aritméticas seguintes:

1. $6+(9-5)$
2. $10-(8-5)$
3. $15-(7+6)$
4. $30+(11+7)$
5. $9+(10-7)$
6. $20-(7-3)$
7. $15+(8-7+5)$
8. $20-(3+4+5)$
9. $30+(8-7+3)$
10. $(25-7)+(10-3)$
11. $(8+7)-(10-6)$
12. $(5-6+7)+(8-3+4)$
13. $(9+8-7)-(10-3-5)$
14. $10+(8-7+9-5+6)$
15. $30-(7+21-10-15)$
16. $12+(11-7+13-8)$
17. $25-(13+8-15+9-10)$
18. $8+(7-5)-(9-4+6)+15-(10-2)$
19. $(8-7+6-5)-(9-3+4-7)$
20. $30+(3+5-6-7-8+9+10)$
21. $35-(2+3+4+5+6+7)$
22. $33-(40-2-3-4-5-6-7)$
23. $(9+4)-(8-5)+(11-7)-(13-6)$

Exercícios. Série IX

Suprimir os parênteses e calcular as expressões aritméticas seguintes:

1. $235-(147-85+93-34-21)+(513-134-238)$
2. $(47-36+59-28)-(600-23-24-25-26)+715$
3. $347-(8\times5-33-7\times4+36\div4)+(120-4\times7\times3)$

N. B. Efetuar as operações de segunda espécie, *antes de eliminar os parênteses.*

4. $(615-23\times7)+539-(30-7\times7+15-5\times6\times8)$
5. $(47-10+5\times8)-(1-4\times5\times3-36\div4+5\times2-8\times7\div14)$
6. $20-(7-4\times3+10-5\times5+3\times8-6\times2\times5\times4)$
7. $20-(15+8-13+11-20)+(-3-7-8+9\times6-1)$

Exercícios. Série X

Problemas sôbre as quatro operações

1. Repartir entre dois meninos a quantia de Cr$ 53,00, de modo que o mais velho receba Cr$ 13,00 mais do que o mais moço.

Da quantia a repartir, Cr$ 53,00, separam-se Cr$ 13,00; restam Cr$ 40,00. Dividem-se êstes Cr$ 40,00 em duas partes iguais, uma para cada menino. Então cada menino receberá Cr$ 20,00. Em seguida, entregam-se ao menino mais velho os Cr$ 13,00 que tinham sido separados dos Cr$ 53,00. Resulta que o menino mais velho recebe Cr$ 20,00 + Cr$ 13,00 e o mais moço recebe Cr$ 20,00. Nestas condições os Cr$ 53,00 ficam repartidos pelos dois meninos e o mais velho recebe Cr$ 13,00 mais do que o mais moço.

2. Calcular dois números tendo por soma 375 e por diferença 129.

Para resolver êste problema, é bastante observar que, calcular dois números tendo por soma 375 e por diferença 129, é o mesmo que repartir Cr$ 375,00 em duas porções tais que uma tenha Cr$ 129,00 mais do que a outra. Logo, êste problema pode ser resolvido como o anterior.

Solução. $(375 - 129) \div 2 = 246 \div 2 = 123$
$123 + 129 = 252$

Resposta. Os dois números pedidos são 252 e 123.

3. Calcular dois números tendo por soma 3 785 e por diferença 1 439.

4. O dôbro da soma de dois números é 1 642. A têrça parte da diferença dos mesmos números é 179. Quais são os dois números?

5. Calcular dois números cuja soma é 105 e cujo quociente é 6.

Regra. Para calcular dois números cuja soma é s e cujo quociente é q, divide-se s por $q + 1$; o resultado desta divisão é o número menor.

Exemplo. Calcular dois números cuja soma é 276 e cujo quociente é 11.

$276 \div (11 + 1) = 276 \div 12 = 23$ (é o número menor)
$23 \times 11 = 253$ (é o número maior)

6. Calcular dois números cuja diferença é 235 e cujo quociente é 6.

Regra. Para calcular dois números cuja diferença é d e cujo quociente é q, divide-se d por $q - 1$; o resultado desta divisão é o número menor.

Exemplo. Calcular dois números cuja diferença é 216 e cujo quociente é 7.

$216 \div (7 - 1) = 216 \div 6 = 36$ (é o número menor)
$36 \times 7 = 252$ (é o número maior)

Observação. Conhecendo a soma, a diferença, o produto e o quociente de dois números, podemos organisar seis problemas diferentes, nos quais se pedem êstes dois números.

1.º) Calcular dois números, conhecendo-se sua soma e diferença.
2.º) » » » , » sua soma e produto.
3.º) » » » , » sua soma e quociente.
4.º) » » » , » sua diferença e produto.
5.º) » » » , » sua diferença e quociente.
6.º) » » » , » seu produto e quociente.

O 1.º, o 3.º e o 5.º acabam de ser resolvidos. Entretanto, para resolver o 2.º o 4.º e o 6.º precisamos de conhecimentos que ainda não possuímos.

7. A soma dos capitais de dois negociantes é Cr$ 47 520,00. O capital de um dêles é igual a 7 vêzes o capital do outro. Qual o capital de cada um?

8. A diferença entre os estoques de fazendas de dois negociantes é de 53 676 metros. Sabendo-se que o estoque de um negociante é igual a 13 vêzes o estoque do outro, quantos metros de fazenda possui cada negociante?

9. Um filho tem 33 anos menos que o pai. O pai tem 4 vêzes a idade do filho. Qual é a idade de cada um? (6.º problema)

10. Um pai tem 4 vêzes a idade do filho. A soma das idades do pai e do filho é igual a 70. Qual a idade de cada um? (5.º problema)

11. Multiplicando-se um certo número por 13, o produto obtido é igual ao multiplicando aumentado de 1 020 unidades. Qual é o número?

Para resolver êste problema é bastante observar que o número pedido e o produto de sua multiplicação por 13, são dois números cuja diferença é 1 020 e cújo quociente é 13. (6º problema)

12. Dividir 4 785 em duas partes cuja diferença seja 1 237.

13. Dois indivíduos se reuniram para negociar, constituindo um capital de Cr$ 37 480,00. A diferença entre os dois capitais sendo de Cr$ 2 597,00 pergunta-se qual o capital de cada um.

14. Calcular a soma e a diferença dos produtos 48×35 e 48×15 sem efetuar estas duas multiplicações.

De acôrdo com a definição da multiplicação, 48×35 é uma soma de 35 parcelas iguais a 48, e 48×15 é uma soma de 15 parcelas iguais a 48. Portanto,

$$48 \times 35 + 48 \times 15 = 48 \times (35 + 15) = 48 \times 50 = 2\,400$$
$$48 \times 35 - 48 \times 15 = 48 \times (35 - 15) = 48 \times 20 = 960$$

15. Calcular a soma e a diferença dos produtos 37×45 e 37×25, sem efetuar estas duas multiplicações.

16. Calcular $53 \times 25 + 53 \times 13 + 53 \times 12$, sem efetuar as multiplicações indicadas.

17. Calcular $32 \times 18 + 32 \times 15 - 32 \times 13$, sem efetuar as multiplicações indicadas.

18. O triplo do produto de dois números é 4 968. A quarta parte de um dêles é 18. Quais são os dois números?

19. O quíntuplo do produto de dois números é 2 755. O quádruplo de um dêles é 116. Quais são os dois números?

20. Distribuindo-se certo número de metros de fazenda por 7 548 pessoas, cada uma recebeu 796 metros e restaram ainda 2 526 metros. Quantos metros de fazenda tinham sido separados para a distribuição?

21. Distribuindo-se 674 548 metros de fazenda por um certo número de pessoas, cada uma recebeu 787 metros e restaram ainda 89 metros. Calcular o número de pessoas.

22. Um industrial repartiu 185 296 metros de fazenda em fardos de 829 metros. Restaram 429 metros. Calcular o número de fardos.

23. Um empregado não pode gastar Cr$ 800,00 por mês porque, ao cabo de um ano, ficaria devendo Cr$ 1 200,00. Qual é seu ordenado mensal? Quanto deve gastar por mês, se quiser economizar Cr$ 2 700,00 em 5 anos?

24. Um perú e um frango custam juntamente Cr$ 19,70. O preço do perú é igual a 4 vêzes o preço do frango. Quanto custarão 23 perús e 87 frangos?

25. Comprei 3 frangos e 4 perús por Cr$ 68,55. Entretanto, se eu tivesse comprado 8 frangos e 4 perús, teria gasto Cr $ 84,80. Quanto custou cada ave?

N. B. Observe-se que a diferença Cr$ 84,80 — Cr$ 68,55 representa o preço de 5 frangos.

26. Comprei 3 frangos e 5 perús por Cr$ 79,26. Entretanto, se eu tivesse comprado 6 frangos e 4 perús, teria gasto Cr$ 78,96. Quanto custou cada ave?

1.ª compra: 3 frangos + 5 perús custaram Cr$ 79,26.
2.ª compra: 6 frangos + 4 perús custaram Cr$ 78,96.

Multiplicando a 1.ª compra por 2, teremos:

1.ª compra: 6 frangos + 10 perús custaram Cr$ 158,52.
2.ª compra: 6 frangos + 4 perús custaram Cr$ 78,96 .

Donde se vê que a diferença Cr$ 158,52 – Cr$ 78,96 é o prêço de 6 perús. Ou, então, multiplicando a 1.ª compra por 4 e a 2.ª por 5, teremos:

1.ª compra: 12 frangos + 20 perús custaram Cr$ 317,04.
2.ª compra: 30 frangos + 20 perús custaram Cr$ 394,80.

Donde se vê que a diferença Cr$ 394,80 – Cr$ 317,04 é o preço de 18 frangos.

Portanto, para resolver problemas desta espécie, é necessário fazer compras fictícias por meio das quais se iguale o número de perús ou o de frangos.

27. Comprei 4 perús e 16 frangos por Cr$ 129,60. Entretanto, se eu tivesse comprado 3 perús e 17 frangos, teria gasto Cr$ 115,79. Calcular o preço de cada perú e o de cada frango.

28. Comprei 842 bois por Cr$ 75 600,00. Paguei Cr$ 1 720,00 pelo transporte. Morreram 37. Por quanto devo vender cada um dos restantes, para realizar um lucro total de Cr$ 12 380,00?

29. Um negociante comprou 4 peças de sêda por Cr$ 1 050,00 e que medem, respectivamente, 23, 19, 15 e 13 metros. Qual é o valor de cada peça?

30. A soma de 2 números é 1 251; a diferença entre ambos é igual ao número menor. Quais são os dois números?

31. Um construtor comprou 84 000 tijolos a Cr$ 47,70 cada milheiro. Mas o oleiro, ao fazer a remessa dos tijolos vendidos, resolveu aumentar de 6% o número de tijolos, sem modificar o preço de venda. Calcular o preço exato de cada tijolo. (6% significa *seis* em cada *cem unidades.*)

32. Um negociante comprou 4 700 ovos a Cr$ 15,00 o cento. Quebrou 236 e vendeu os restantes a Cr$ 2,30 a dúzia. Ganhou ou perdeu? Quanto?

33. Um negociante misturou 34 litros de vinho, de Cr$ 5,40 o litro, com 47 litros de vinho, de Cr$ 3,80 o litro e 10 litros de água. Vendeu cada litro da mistura a Cr$ 4,50. Quanto ganhou em cada litro? Quanto ganhou ao todo?

34. Comprei uma porção de metros de sêda por Cr$ 592,00. Depois vendí tôda a sêda por Cr$ 788,10 lucrando Cr$ 5,30 em cada metro. Quantos metros de sêda comprei?

35. Comprei 2 700 pratos a Cr$ 36,40 o cento. Paguei Cr$ 18,90 de carreto. Ao desencaixotar os pratos, verifiquei que 84 estavam quebrados. Por quanto devo vender cada prato para realizar um lucro total de Cr$ 245,00?

36. Um negociante comprou café e açucar, em partes iguais e pagou Cr$ 355,20. Um quilo de café custa Cr$ 3,60 e um quilo de açúcar custa Cr$ 1,20. Quantos quilos de café e quantos de açúcar comprou êste negociante?

37. Um negociante comprou 36 metros de sêda e 45 metros de fôrro por Cr$ 1 161,00. Um metro de sêda custa Cr$ 15,60 mais do que um metro do fôrro. Calcular o preço do metro de cada fazenda.

38. Um negociante comprou um certo número de pares de meias. Se êle vender cada par a Cr$ 10,30, seu lucro será de Cr$ 423,00; mas, se vender cada par a Cr$ 9,70, seu lucro será de Cr$ 282,00. Quantos pares de meias comprou, quanto pagou por cada par e quanto pagou por tudo?

39. Quero socorrer alguns pobres. Não me é possível dar Cr$ 5,00 a cada um dêles, porque me faltam Cr$ 37,00. Entretanto, se cada um dêles se contentar com Cr$ 4,00, eu ficarei ainda com Cr$ 49,00. Quantos são os pobres? E quanto dinheiro tenho?

40. Comprei sêda a Cr$ 24,00 o metro. Por quanto devo vender cada metro para lucrar em 5 metros, ***o preço de custo*** de um metro?

Solução. O lucro em 5 metros deve ser o custo de um metro, isto é, Cr$ 24,00. Logo, o lucro em cada metro é igual a Cr$ 24,00 ÷ 5, isto é, Cr$ 4,80. Portanto, devo vender cada metro por Cr$ 24,00 mais Cr$ 4,80, isto é, Cr$ 28,80.

41. Comprei 79 metros de sêda. Vendendo 35 metros por Cr$ 420,00, lucrei Cr$ 2,50 em cada metro. Quanto paguei pelos 79 metros?

42. Comprei sêda a Cr$ 24,00 o metro. Por quanto devo vender cada metro para lucrar em 5 metros, o ***preço de venda*** de um metro?

Solução. ***O preço de custo de 5 metros*** é Cr$24,000 × 5, isto é, Cr$ 120,00. Vendendo ***4 metros*** por Cr$ 120,00 ou um metro por Cr$ 30,00, terei salvo o capital que empreguei na compra dos 5 metros. Vendendo o quinto metro de sêda por Cr$ 30,00, esta quantia será o meu lucro na venda dos 5 metros, e êste lucro é justamente o ***preço de venda*** de um metro, a saber, Cr$ 30,00.

43. Comprei 48 carneiros por Cr$ 1 137,60. Por quanto devo vender cada carneiro para lucrar em 25 carneiros, o ***preço de custo*** de 4 carneiros?

44. Comprei 48 carneiros por Cr$ 1 137,60. Por quanto devo vender cada carneiro, para lucrar em 16 carneiros, o ***preço de venda*** de 1 carneiro?

Solução. Cr$ 1 137,60 ÷ 48 = Cr$ 23,70 (custo de um carneiro)
Cr$ $23,70 × 16 = 379,20 (custo de 16 carneiros)
Cr$ 379,20 ÷ 15 = Cr$ 25,28 (preço de venda de um carneiro).

Resposta. Devo vender cada carneiro por Cr$ 25,28.

Observação. Quando queremos vender uma mercadoria qualquer, de modo que o lucro sôbre ***n*** unidades seja igual ao ***preço de venda de uma*** unidade, devemos, em primeiro lugar, calcular o ***preço de custo*** das ***n*** unidades e, em seguida, dividir êste resultado por ***n − 1***.

45. Um comissário tem café pelo qual pagou Cr$ 143,00 por saca. Por quanto deve vender cada saca para lucrar em 12 o ***preço de venda*** de uma?

46. Comprei 37 litros de vinho a Cr$ 3,80; 48 litros a Cr$ 4,50; 54 litros a Cr$ 4,70. Calcular o preço médio de cada litro.

47. Comprei 4 milheiros de ovos a Cr$ 17,00 o cento; sete cestas de ovos, cada uma com 8 dúzias, a Cr$ 13,50 a cesta; comprei mais 6 centos de ovos a Cr$ 2,30 a dúzia, comprei ainda 212 ovos a Cr$ 0,25 cada um. Calcular o preço médio da dúzia.

48. Um reservatório pode conter 43 875 litros de água. Uma torneira despeja dentro dêle 910 litros em 7 minutos e a outra despeja 380 litros

em 4 minutos. Estando o reservatório vazio e abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, em quantas horas o reservatório ficará cheio?

49. Um reservatório pode conter 510 litros de água. Para enchê-lo há uma torneira que despeja 42 litros por minuto; para esvaziá-lo há outra torneira que despeja 25 litros por minuto. Estando o reservatório vazio, e abrindo-se as duas torneiras, exatamente às 6 horas da manhã, a que horas o reservatório estará cheio?

50. Comprei 3 peças de fazenda da mesma qualidade por Cr$ 974,40, a Cr$ 8,40 o metro. A primeira peça tem 42 metros e a segunda, 36. Quantos metros tem a terceira?

51. Vendí um automóvel por Cr$ 7 250,00. Neste negócio perdí a metade do custo do automóvel, menos Cr$ 450,00. Por quanto o tinha eu comprado?

Exercícios. Série XI

Problemas sôbre as quatro operações (*)

1. Representar gràficamente o produto 8×5.

Em primeiro lugar tomamos um segmento retilíneo AM cujo comprimento pode ser qualquer por exemplo, 1 centímetro. Depois construímos um retângulo cujo comprimento AB seja 8 vêzes AM e cuja largura AD seja 5 vêzes AM. A área do retângulo ABCD é 8×5. Portanto, êste retângulo é a representação gráfica do produto 8×5.

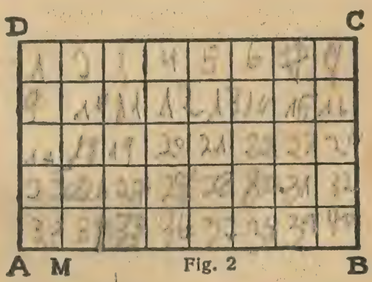


Fig. 2

N. B. Um número pode ser sempre representado por um segmento retilíneo, e um produto de dois números por um retângulo.

2. Construir um quadrado cujo lado meça 15 centímetros. (em papel milimetrado) Com o auxílio dêste quadrado multiplicar dois números quaisquer que não excedam de 15.

3. Representar gràficamente o produto 7×7.

4. O produto de dois números é 255. Juntando-se 4 unidades ao multiplicador, o produto se torna igual a 323. Quais são os dois números?

Observemos as duas igualdades seguintes:

$$14 \times 5 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14$$
$$14 \times 8 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14$$

Ora $14 \times 5 = 70$ e $14 \times 8 = 112$. A diferença entre os produtos é 42. E as duas igualdades nos mostram que esta diferença, 42, representa a soma de 3 parcelas iguais a 14. Portanto, se o multiplicador passa de 5 a 8, isto é, aumenta de 3 unidades, o produto aumenta de 3 vêzes o multiplicando.

(*) Há nesta série de exercícios, alguns muito simples sôbre a área do retângulo e a do quadrado. São questões já resolvidas pelos estudantes, no curso primário.

Segue-se pois que, para resolver o problema proposto, é bastante dividir o acréscimo do produto pelo acréscimo do multiplicador, e ter-se-á o multiplicando.

5. O produto de dois números é 1 166. Juntando-se 8 unidades ao multiplicador, o produto se torna igual a 1 590. Quais são os dois números?

$(1\,590 - 1\,166) \div 8 = 424 \div 8 = 53$ (é o multiplicando)

$1\,166 \div 53 = 22$ (é o multiplicador)

6. O produto de dois números é 630. Juntando-se 4 unidades ao multiplicador, o produto se torna igual a 798. Quais são os dois números?

7. O produto de dois números é 18 391. Juntando-se 10 unidades ao multiplicador, o produto se torna igual a 21 861. Quais são os dois números?

8. O produto de dois números é 3 504. Subtraindo-se 3 unidades do multiplicador, o produto se torna igual a 3 285. Quais são os dois números?

9. O produto de dois números é 2 125. Juntando-se 5 unidades ao multiplicando, o produto se torna igual a 2 210. Quais são os dois números?

10. O produto de dois números é 20 060. Subtraindo-se 5 unidades do multiplicando, o produto se torna igual a 19 635. Quais são os dois números?

N. B. Quando se somam n unidades ao multiplicando, o produto sofre um acréscimo igual a n vêzes o multiplicador. Quando se somam n unidades ao multiplicador, o produto sofre um acréscimo igual a n vêzes o multiplicando. Quando se subtraem n unidades do multiplicando, o produto sofre um decréscimo igual a n vêzes o multiplicador. Quando se subtraem n unidades do multiplicador, o produto sofre um decréscimo igual a n vêzes o multiplicando.

11. Dado o produto 8×5, soma-se uma unidade ao multiplicando e outra ao multiplicador. Verificar gràficamente, em papel milimetrado, que o acréscimo do produto é igual a $8 + 5 + 1$.

12. Dado o produto 10×5, somam-se 3 unidades ao multiplicando e 3 unidades ao multiplicador. Verificar gràficamente, em papel milimetrado, que o acréscimo do produto é igual a $5 \times 3 + 10 \times 3 + 3 \times 3$.

13. Dado o produto 12×8, somam-se 5 unidades ao multiplicando e 4 unidades ao multiplicador. Verificar gràficamente, em papel milimetrado, que o acréscimo do produto é igual a $5 \times 8 + 4 \times 12 + 5 \times 4$.

14. Calcular o perímetro e a área de um quadrado cujo lado mede 25m.

15. Calcular o perímetro e a área de um quadrado cujo lado mede 62dm.

16. Calcular o perímetro e a área de um quadrado cujo lado mede 82cm.

17. O perímetro de um quadrado mede 292m. Calcular o lado e a área.

18. O perímetro de um quadrado mede 1 296m. Calcular o lado e a área.

19. Um terreno retangular mede 234m por 87m. Calcular o perímetro e a área.

20. Um retângulo tem 12dm de largura. O comprimento é igual a 4 vêzes a largura. Calcular o perímetro e a área.

21. Um retângulo tem 1 296m de comprimento. A largura é igual a três quartos do comprimento. Calcular o perímetro e a área.

22. O perímetro de um retângulo mede 138m. O comprimento é o dôbro da largura. Calcular o comprimento, a largura e a área.

23. O perímetro de um retângulo mede 2 024m. A largura é um têrço do comprimento. Calcular o comprimento, a largura e a área.

24. Um terreno mede 649m de comprimento por 235 de largura. Abrem-se duas ruas neste terreno, com 13m de largura, perpendiculares entre si, uma no sentido do comprimento e outra no sentido da largura, e a igual distância dos limites do terreno. Fica assim o terreno dividido em 4 quarteirões iguais. Calcular a área de cada uma das ruas, a área das duas ruas, o perímetro de cada quarteirão e a área de cada quarteirão.

25. Quais são os dois números cuja soma é 1 410 e cuja diferença contém 4 vêzes o número menor?

N. B. Nos ***problemas sôbre as quatro operações*** (série X) aprendemos como se calculam dois números dos quais se conhece a ***soma e o quociente*** (terceiro problema) ou ***a diferença e o quociente.*** (quinto problema)

Sejam a e b dois números que não conhecemos e, sejam s e d, a soma e a diferença dêstes mesmos números. Supondo que o quociente de a por b seja 7, estamos habilitados a escrever as seguintes igualdades:

$$s = 8 \times b \qquad a = 7 \times b \qquad d = 6 \times b$$

Estas igualdades nos permitem resolver o problema acima proposto.

26. Calcular dois números sabendo-se que sua soma é 33 896 e que sua diferença contém 6 vêzes o menor.

27. Calcular dois números sabendo-se que sua diferença é 15 288 e que sua soma contém 8 vêzes o menor.

28. Calcular dois números consecutivos tendo por soma 555.

29. Calcular três números consecutivos tendo por soma 1 362.

30. Calcular quatro números consecutivos tendo por soma 4 970.

31. Calcular cinco números consecutivos tendo por soma 28 910.

32. Carlos e Raul receberam Cr\$ 200,00 e repartiram esta quantia de modo tal que Carlos ficou com Cr\$ 37,00 mais do que Raul. Quanto recebeu cada um?

33. Carlos, Raul e Mário receberam Cr\$ 500,00 e repartiram esta quantia de modo tal que Carlos ficou com Cr\$ 42,00 mais do que Raul e êste com Cr\$ 37,00 mais do que Mário. Quanto recebeu cada um?

34. Carlos, Raul, Mário e Pedro receberam Cr\$ 1 000,00 e repartiram esta quantia de modo tal que Carlos recebeu Cr\$ 27,00 menos do que Raul, Raul recebeu Cr\$ 34,00 menos do que Mário, e Mário recebeu Cr\$ 47,00 menos do que Pedro. Quanto recebeu cada um?

35. Três operários receberam seus salários. Os operários A e B receberam Cr\$ 570,00; os operários A e C receberam Cr\$ 680,00; os operários B e C receberam Cr\$ 750,00. Quanto recebeu cada um?

36. Três operários receberam seus salários. O primeiro e o segundo receberam Cr\$ 738,00; o primeiro e o terceiro receberam Cr\$ 857,00; o segundo e o terceiro receberam Cr\$ 925,00. Quanto recebeu cada um?

37. Quanto devemos somar ao número 375 para que o resultado contenha 52 vêzes o mesmo número 375?

Solução. Temos o número 375; queremos o número 375 × 52. É bastante somar ao número 375 o número 375 × 51, isto é, 19 125.

38. Dividir 22 488 por 3 748 com o auxílio exclusivo da subtração.

39. Dividir 4 559 por 478 com o auxílio exclusivo da subtração.

40. Calcular um número que, sendo multiplicado por 19, dê um produto igual ao quociente da divisão de 10 925 por 23.

41. Em uma avenida, as árvores estão plantadas com intervalo de 12m. As árvores situadas de um mesmo lado são 275. A primeira e a última ficam a 4m de distância das extremidades da avenida. Qual é o comprimento desta?

N. B. Convém observar que duas árvores correspondem a um intervalo de 12 metros; três, correspondem a dois intervalos, cada um com 12 metros; quatro, correspondem a três intervalos, cada um com 12 metros; e assim por diante.

O professor coloque 10 alunos de pé, em linha, afastados uns dos outros, e a classe verá imediatamente que os intervalos entre os 10 alunos são 9. Entretanto, se os alunos, de mãos dadas, formarem uma roda, o número de intervalos será igual ao de alunos.

42. Uma avenida mede 3 915 metros de comprimento. Calcular o número de árvores plantadas de um mesmo lado da avenida, sabendo-se que o intervalo entre duas árvores consecutivas é de 9 metros e que a primeira árvore e a última estão plantadas nas extremidades da avenida.

43. Um operário gasta diàriamente Cr$ 0,54 de fumo e Cr$ 1,36 de álcool. Aos domingos gasta o dôbro. Quanto poderia economizar em um ano, se êle pudesse libertar-se dêstes dois vícios? Supõe-se que o ano não é bissexto e que o dia 1.º de janeiro foi domingo.

N. B. O ano tem 365 dias ou 52 semanas e 1 dia. Portanto, se o primeiro dia de um ano que não é bissexto, é uma quinta-feira, o último dia dêste mesmo ano é também uma quinta-feira.

44. Um operário ganha Cr$ 14,50 por dia, sua mulher ganha Cr$ 9,80 e cada um de seus três filhos ganha Cr$ 5,70. A despesa diária desta família é de Cr$ 26,70. Quais serão as economias desta família ao cabo de 5 anos, admitindo-se que haja 64 dias feriados por ano e que, em cada um dêstes dias feriados, a família tenha uma despesa extraordinária de Cr$ 20,00?

N. B. Para resolver êste problema, aliás muito fácil, é necessário que o estudante calcule em primeiro lugar a ***receita*** anual, isto é, a importância dos salários recebidos pela família, durante um ano. Em seguida, deverá calcular a ***despesa*** anual. A diferença entre a ***receita*** e a ***despesa*** representará a economia anual, desde que a receita seja maior do que a despesa. E, conhecida a economia anual, será bastante multiplicá-la por 5. Note-se também, que os operários ganham sòmente quando trabalham. Se um operário ganha Cr$ 15,00 por dia e gasta Cr$ 12,00 por dia, a sua receita semanal é Cr$ 15,00×6 e a sua despesa semanal é Cr$ 12,00×7.

45. Um operário recebeu Cr$ 170,20 por um certo número de dias de trabalho. Entretanto, se tivesse trabalhado mais 8 dias, teria recebido Cr$ 229,40. Quantos dias trabalhou? Quanto ganha por dia?

46. Dois operários, trabalhando juntos, durante 45 dias, receberam Cr$ 720,00. Um dêles ganha Cr$ 8,40 por dia. Quanto ganha o outro?

47. Um operário economizou Cr$ 7 540,00 em 5 anos. Tendo descansado 74 dias por ano, e sendo sua despesa diária de Cr$ 15,80, pergunta-se quanto ganhou por dia de trabalho.

48. Um operário ganha por dia Cr$ 18,70. Trabalha, em média, 25 dias por mês. Paga Cr$ 120,00 mensais pelo aluguel de casa e economiza Cr$ 885,00 em um ano. Qual é a sua despesa diária?

49. Um negociante comprou 13 caixas de lenços por Cr$ 12 480,00. Cada caixa contém 40 dúzias. O negociante pagou Cr$ 36,00 de transporte e selou cada lenço com Cr$ 0,02. Tendo vendido cada lenço a Cr$ 3,00, qual foi o seu lucro total?

50. Comprei 75 milheiros de tijolos a Cr$ 44,10 cada milheiro. Entretanto, o oleiro resolveu beneficiar-me com um acréscimo de 50 tijolos em cada milheiro. Depois eu vendí êstes tijolos a Cr$ 5,00 cada cento. Qual foi o meu lucro?

51. Vendí 40 kilos de nozes a Cr$ 5,70 o quilo e castanhas a Cr$ 3,20. A receita total foi de Cr$ 452,00. Quantos quilos de castanhas vendí?

52. Comprei 8 pipas de vinho por Cr$ 3 720,00. Em uma semana vendí 74 litros por Cr$ 140,60, realizando um lucro de Cr$ 0,35 por litro. Quantos litros contém cada pipa?

53. Quatro negociantes compraram 800m de sêda por Cr$ 21 920,00. O primeiro entrou com Cr$ 5 891,00; o segundo com Cr$ 5 178,60; o terceiro com Cr$ 6 850,00. Quantos metros de sêda comprou cada um dos negociantes?

54. Comprei duas peças de sêda da mesma qualidade e com a mesma largura. Paguei Cr$ 1 708,00 por uma e Cr$ 1 195,60 pela outra. Há entre as duas uma diferença de 12 metros. Quanto paguei pelo metro de sêda? Qual é o comprimento de cada uma das peças?

55. Cerca-se um terreno retangular de 150m por 76m com três fios de arame amarrados a postes de madeira. A distância entre dois postes consecutivos é de 2m. Cada poste custa Cr$ 1,30 e o metro de arame custa Cr$ 0,64. Calcular o custo desta cêrca. (Vide problema n.° 41, N. B.)

56. Comprei um terreno retangular cujo perímetro mede 5 676m. Paguei Cr$ 7,84 por metro quadrado. Mandei cercá-lo, tendo pago Cr$ 0,56 por metro de cêrca. Qual foi a despesa total? O terreno tem 320 metros de largura.

57. Um menino nasceu em 1.° de janeiro de 1929. Quantas horas de existência tinha êle em 17 de setembro de 1936? É preciso levar em conta os anos bissextos e o número exato dos dias de cada mês; os dias 1–1–29 e 17–9–36 serão também incluídos na idade do menino.

58. Um sitiante colheu 15 cestas de laranjas que foi deixando pelo caminho, a 30 metros de distância, uma da outra. As 15 cestas ficaram em linha reta. Depois o sitiante reuniu tôdas as cestas, de uma em uma, no lugar em que estava a primeira. Quantos metros percorreu para fazer êste serviço?

59. Tenho Cr$ 620,00 em notas de Cr$ 10,00 e de Cr$ 5,00. O número de notas é 74. Calcular o número de notas de Cr$ 10,00 e o número de notas de Cr$ 5,00.

60. Comprei laranjas; deram-me uma de mais em cada dúzia e eu recebí 351 laranjas. Quantas dúzias tinha eu pedido?

61. Comprei maçãs; deram-me uma de mais em cada duas dúzias e recebí 825 maçãs. Quantas dúzias tinha eu pedido?

43. Números relativos. ***Somar números naturais é contar.*** Quem soma números naturais, conta. Para somar 8 com 5 diremos: $8+1=9$, $9+1=10$, $10+1=11$, $11+1=12$, $12+1=13$. Portanto, $8+5=13$. E não há outro modo de somar 8 com 5. Quem quiser evitar êste trabalho, deve decorar a soma dos números 8 e 5. Entretanto, pode-se abreviar o processo indicado, recorrendo aos dedos; pegando sucessivamente em cada um dos dedos de uma das mãos, diremos: *nove, dez, onze, doze* e *treze*. Portanto, $8+5=13$.

Subtrair números naturais é contar. Quem subtrai números naturais, conta. Para subtrair 5 de 13, diremos: $13-1=12$, $12-1=11$, $11-1=10$, $10-1=9$, $9-1=8$. Portanto, $13-5=8$. E não há outro modo de subtrair 5 de 13. Quem quiser evitar êste trabalho, deve decorar a diferença entre 13 e 5. Entretanto, pode-se abreviar o processo indicado, recorrendo aos dedos; pegando sucessivamente em cada um dos dedos de uma das mãos, diremos: *doze, onze, dez, nove* e *oito*. Portanto, $13-5=8$.

Do exposto resultam as duas conclusões seguintes:

a) *somar é contar para diante;*
b) *subtrair é contar para trás.*

44. Um gráfico para somar e subtrair. Em uma fôlha de papel traçamos uma reta (gráfico A). (*) Nesta reta escolhemos um ponto qualquer 0 (*zero*). A partir do ponto zero, *e para a direita* (poderia ser para a esquerda) tomamos um segmento (**) cujo comprimento pode ser qualquer, por exemplo, um centímetro;

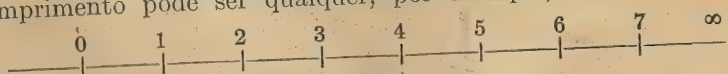


Gráfico A

em continuação a êste segmento tomamos um segundo segmento que deverá ser igual ao primeiro; em continuação ao segundo segmento, um terceiro segmento que deverá ser igual ao primeiro, e assim sucessivamente. E estará feito o nosso gráfico.

(*) Convém desenhar êste gráfico no quadro-negro, prolongando-se a numeração dos segmentos até 28 ou 30 ou mais.

(**) O programa atual da 1.ª série ginasial não inclui noções de Geometria, o que nos parece muito acertado. Com efeito, o conhecimento destas noções, necessárias para o desenvolvimento do mesmo programa, é dado no curso primário. Assim, pedimos aos nossos distintos colegas que se dignem recordá-las, quando esquecidas pelos seus alunos.

Neste gráfico, o número 3 está representado pelo segmento que começa no ponto zero e termina no ponto 3; o número 3 não é o ponto 3; é o segmento 0|3, isto é, a soma dos segmentos 0|1, 1|2, 2|3. Anàlogamente, o número 5 não é o ponto 5; é a soma dos segmentos 0|1, 1|2, 2|3, 3|4, 4|5; é o segmento 0|5. (Quando dizemos, por exemplo, segmento 0|4, estamo-nos referindo ao segmento cuja origem é 0 (zero) e cuja extremidade é 4.) O gráfico A é a representação gráfica dos números inteiros, cuja sucessão se extende até o infinito, *como se costuma dizer;* o infinito é representado pelo símbolo ∞.

Com êste gráfico podemos somar e subtrair. Por exemplo, $7 + 5 = ?$ Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 7, contamos 5 segmentos *para a direita* e encontramos o número 12, que é a soma pedida. Outro exemplo: $4 + 11 = ?$ Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 4, contamos 11 segmentos *para a direita* e encontramos 15, que é a soma pedida.

Quanto é $13 - 5$? Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 13, contamos 5 segmentos *para a esquerda* e encontramos 8, que é a diferença pedida. Quanto é $17 - 9$? Vamos ao gráfico, procuramos o ponto 17, contamos 9 segmentos *para a esquerda* e encontramos 8, que é a diferença pedida.

Portanto, *no gráfico* A *fica estabelecido que:*

a) ***somar é contar para a direita;***

b) ***subtrair é contar para a esquerda.***

Já vimos que a subtração nem sempre é possível, no campo dos números naturais. (§ 24, observação)

No campo numérico do gráfico A, de 13 não podemos subtrair 18. Vamos ao gráfico A e tentemos subtrair 18 de 13. Procuramos o ponto 13 e contamos 18 segmentos para a esquerda... mas, não é possível, porque à esquerda do ponto 13 há sòmente 13 segmentos e não 18.

45. Ampliação do campo numérico. Voltemos ao gráfico A. A partir do ponto 0 (zero) e *para a esquerda,* marquemos mais uma porção de segmentos iguais aos que foram marcados para a direita. Teremos assim o gráfico B. (*)

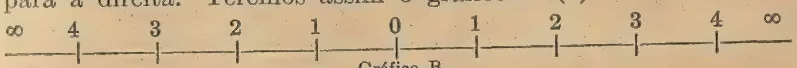


Gráfico B

(*) Reproduzir êste gráfico no quadro-negro, estendendo-se a numeração nos dois sentidos, mais ou menos até 20.

E, agora, quanto é 13 — 18? Vamos ao gráfico B, procuremos o ponto 13, contemos 18 segmentos *para a esquerda* e encontraremos o número 5. Portanto, 13 — 18 = 5.........

Ora!!!, dirão quasi todos os alunos que estão na classe, ouvindo atentamente o professor. O pasmo é geral. E os alunos que não proferiram aquela exclamação de espanto, olham para o professor, atônitos, assim com uns ares de quem diz: *O professor está brincando?!*

E êste espanto é justificado porque, no gráfico A ou B, o número 5 é representado pelos cinco primeiros segmentos situados *à direita* do ponto zero e não *à esquerda*. E êsse número é a diferença entre 13 e 8, como já aprendemos.

Mas o professor insiste dizendo que 13 – 18 = 5 e que o resto ao qual êle se refere, não é o segmento 0|5, *à direita do ponto zero*, mas o segmento 0|5 *à esquerda do ponto zero*. Mas, como distinguir *êstes dois* ***cincos?***

46. Números positivos e negativos. Para distinguir *os dois* ***cincos*** do gráfico B, estabelecemos a seguinte convenção: *todos os números situados à direita do ponto* 0 (zero) *serão chamados* ***positivos*** *e serão precedidos pelo sinal* + (mais); *todos os números situados à esquerda do ponto* 0 (zero) *serão chamados* ***negativos*** *e serão precedidos pelo sinal* — (menos).

Chamam-se ***números qualificados*** *ou* ***números relativos,*** *aos números* ***associados*** *com o sinal* + (mais) *ou com o sinal* — (menos).

E o gráfico B ficará modificado como se vê no gráfico C (*).

$$-\infty \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +\infty$$

Gráfico C

Os números positivos são velhos conhecidos nossos; são os números com os quais travámos conhecimento aos sete anos de idade, quando entrámos para a escola primária. Com êles trabalhámos durante os quatro anos do curso preliminar, aprendendo as operações que com êles se efetuam e as suas propriedades. Entretanto, não dizíamos então *números positivos;* dizíamos apenas *números naturais,* por não termos necessidade de distinguí-los dos *negativos,* que criámos com o gráfico C.

(*) Desenvolver êste gráfico no quadro negro, como os anteriores.

E, estabelecendo a indicada convenção dos sinais, concluímos:

$$13 - 18 = -5$$

Surgem assim os números negativos: *menos um, menos dois, menos três, menos quatro, menos cinco,* etc., e os números naturais, os nossos velhos conhecidos da escola primária, para não se confundirem com êsses recém-chegados chamados *números negativos,* tomam o nome de *números positivos* e são enunciados: *mais um, mais dois, mais três, mais quatro,* etc..

Observação. Na vida prática temos numerosos exemplos de números positivos e negativos. As temperaturas são contadas acima e abaixo de zero; se *convencionarmos* que as temperaturas acima de zero são números positivos, as abaixo de zero serão números negativos. A latitude de uma cidade pode ser Norte ou Sul; se estabelecermos que a latitude Norte é um número positivo, a latitude Sul será um número negativo. Para o que se vai seguir exemplificaremos sempre com ***débitos*** e ***créditos,*** considerando os primeiros como ***números negativos*** e os segundos, ***positivos.***

47. Valor absoluto de um número relativo; módulo. *Valor absoluto de um número relativo é o valor que êle tem quando se suprime o seu sinal; é o seu valor aritmético.* Por exemplo, o valor absoluto de $+10$ ou -10 é 10; de $+5$ ou -5 é 5.

O valor absoluto de um número relativo é também chamado *módulo* dêste mesmo número. Para indicar o módulo de um número relativo, coloca-se o mesmo entre dois pequenos traços verticais. Assim:

O valor absoluto ou *módulo de* $+5$ é $|+5|$, isto é, 5.

O valor absoluto ou *módulo de* -5 é $|-5|$, isto é, 5.

Os números negativos constituem *uma continuação* dos números positivos, *abaixo do número zero.* Consideremos a sucessão dos números inteiros que se extende indefinidamente: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ... ∞. Tomemos agora um número qualquer, por exemplo, 12; vamos subtrair dêste número uma unidade, depois outra, depois outra, etc.. Teremos: 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. E não é possível continuar. Mas será possível se considerarmos a sucessão dos números relativos: 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, ... $-\infty$.

Destas observações resultam verdades importantes.

I. Os números positivos e negativos constituem uma única sucessão de números que se estende, que se desenvolve indefinidamente em dois sentidos opostos.

II. O número que divide esta sucessão em duas sucessões, a dos números positivos e a dos negativos, é o número zero. *Zero* é um número que indica falta de unidades; o indivíduo que tem Cr$ 20,00 a pagar e Cr$ 20,00 a receber, liquida suas contas e fica com *zero cruzeiros;* o negociante que gastou Cr$ 50 000,00 em mercadorias e recebeu Cr$ 50 000,00 pelas mesmas, ganhou *zero cruzeiros.*

III. Assim como 6 é maior que 5, 5 maior que 4, etc., do mesmo modo 0 (zero) é maior que -1, -1 é maior que -2 -2 é maior que -3, etc.. Enfim, zero é maior do que qualquer número negativo e, de dois números negativos, o maior é aquêle cujo valor absoluto ou módulo é menor. Por exemplo, -3 é maior que -5, que por sua vez é maior que -7, etc..

IV. No gráfico C examinemos os números $+8$ e -8 (mais 8 e menos 8). Ambos estão representados pelo mesmo número de segmentos, isto é, por oito segmentos, e êsses segmentos são iguais. Portanto, em valor absoluto, êsses dois números são iguais. Entretanto, o número $+8$ começa no ponto 0 (zero) e se extende para à direita, ao passo que o número -8 começa no ponto 0 e se estende para a esquerda. As extremidades dos números $+8$ e -8 estão situadas sôbre a mesma reta XY e distam igualmente do ponto 0. Por êste motivo, dá-se aos números $+8$ e -8 o nome de *números simétricos.* (*) Portanto, dois números simétricos são dois números iguais em valor absoluto, mas com sinais contrários. Exemplos: $+8$ e -8, $+11$ e -11, etc..

Os números relativos dividem-se em três classes: a dos números positivos, a dos números negativos, e uma terceira classe que só compreende um número, o número ***neutro*** *ou* ***zero.*** (**)

Os números $+0$ e -0 são chamados *números nulos.*

48. O sinal + (mais) e o sinal — (menos). Êstes dois sinais indicam, respectivamente, a adição e a subtração, isto é as duas primeiras operações que se realizam sôbre os números. E, além desta função, êles desempenham mais uma, importan-

(*) Dois pontos são simétricos em relação a um ponto dado, quando o ponto dado é o meio do segmento que liga os dois primeiros.

(**) J. I. Almeida Lisboa, *Lições de Álgebra Elementar*, Primeiro Volume, pág. 22.

tíssima: é a função de qualificar os números, isto é, indicar se êles, no gráfico C, devem ser contados de zero para a direita ou de zero para a esquerda; *indicar se êles são positivos ou negativos.*

49. Operações com números relativos. Para maior clareza, e até que os estudantes adquiram a prática dos números relativos, escreveremos entre parênteses os números dados com seus sinais. Seja a expressão

$$(+5) + (-7) + (+10) - (-5) + (-20) - (+20)$$

O sinal que está situado dentro dos parênteses, à esquerda de cada número, está qualificando êste mesmo número; o sinal *mais* e o sinal *menos* que estão ligando as expressões $(+5)$, (-7), $(+10)$, (-5), etc., estão indicando as operações que queremos realizar sôbre êsses números.

I. Adição

Primeiro exemplo: $(+8) + (+7)$. No gráfico C procuramos o ponto $+8$, contamos 7 segmentos *para a direita* e acharemos $+15$. Portanto, $(+8) + (+7) = +15$. Neste exemplo não há nada a justificar; somar números positivos ou naturais é a mesma coisa. (*)

Segundo exemplo: $(-7) + (+12)$. No gráfico C procuramos o ponto -7, contamos 12 segmentos *para a direita* e acharemos $+5$. Logo, $(-7) + (+12) = +5$. Com efeito, quem deve 7 e tem a receber 12, liquida suas contas e fica com 5.

Terceiro exemplo: $(-17) + (+13) = -4$. A partir do ponto -17, contamos 13 segmentos *para a direita* e acharemos -4. Com efeito, quem deve 17 e tem a receber 13, se quiser liquidar suas contas, ficará devendo 4.

Quarto exemplo: $(+15) + (-8)$. A partir do ponto $+15$, contamos 8 segmentos *para a esquerda* e acharemos $+7$. Na verdade, se eu tenho 15 a receber e 8 a pagar, é claro que, liquidando minhas contas, ficarei com 7.

Quinto exemplo: $(+3) + (-10)$. A partir do ponto $+3$, contamos 10 segmentos *para a esquerda* e acharemos -7, re-

(*) As adições e subtrações de números relativos serão efetuadas no gráfico *C*. Os resultados singulares serão justificados pela comparação com débitos e créditos. É o que vimos fazendo há 20 anos, com pleno êxito.

sultado êste que se justifica facilmente, procedendo como no quarto exemplo.

Sexto exemplo: $(-4) + (-8)$. A partir do ponto -4, contamos 8 segmentos *para a esquerda* e acharemos -12. Realmente, a soma de dois débitos, 4 e 8, só pode ser um débito, 12.

Destes exemplos concluímos que:

a) Somar um número ***positivo*** *é contar para a* ***direita*** *(gráfico C).*

b) Somar um número ***negativo*** *é contar para a* ***esquerda*** *(gráfico C).*

E, ao mesmo tempo, podemos estabelecer a seguinte

Regra. *Para somar dois números relativos,* ***com o mesmo sinal,*** *somam-se seus valores absolutos e dá-se à soma o sinal que os dois números têm.*

Para somar dois números relativos ***com sinais contrários,*** *calcula-se a diferença entre os valores absolutos dos mesmos e dá-se ao resultado o sinal do número maior em valor absoluto.* Portanto,

$(+8)+(+7)=+15$ | $(+15)+(-8)=+7$
$(-7)+(+12)=+5$ | $(+3)+(-10)=-7$
$(-17)+(+13)=-4$ | $(-4)+(-8)=-12$

Observação. $(+10)+(-10)=0$. Com efeito, quem tem 10 a pagar e 10 a receber, liquida suas contas e fica sem dinheiro algum. Logo, *a soma de* ***dois números simétricos*** *(§47) é nula*

Exercício. Calcular a soma seguinte:

$$(+8)+(-7)+(+15)+(-13)+(-20)+(+2)+(+16)+(-9)$$

Em primeiro lugar somamos os números positivos, depois os negativos e finalmente as duas somas.

$$(+8)+(+15)+(+2)+(+16)=+41$$
$$(-7)+(-13)+(-20)+(-9)=-49$$
$$(+41)+(-49)=-8$$

Exercícios. Série XII

1. $(+234)+(+547)=$
2. $(+512)+(-864)=$
3. $(-841)+(+637)=$
4. $(+37)+(+58)+(+93)=$
5. $(+748)+(-329)=$
6. $(-732)+(+987)=$
7. $(-549)+(-785)=$
8. $(-15)+(-87)+(-72)=$
9. $(+43)+(-87)+(+28)+(+53)+(-387)+(-128)+(+415)=$

10. $(-34)+(-38)+(-42)+(-59)+(+85)+(+137)+(-203) =$
11. $(+17)+(-18)+(+543)+(-376)+(-641)+(+84)+(-15) =$
12. $(-37)+(-48)+(-57)+(-74)+(+123)+(+235)+(+436) =$
13. $(-213)+(+315)+(+518)+(-722)+(-88)+(+75)+(+429) =$
14. $(+257)+(-813)+(+569)+(-137)+(-146)+(-158)+(-174) =$
15. $(+483)+(-75)+(-84)+(-97)+(-103)+(-125)+(-150) =$

II. Subtração

Primeiro exemplo. $(+15)-(+8)$. No gráfico C procuramos o ponto $+15$, contamos 8 segmentos *para a esquerda* e acharemos $+7$. Portanto, $(+15)-(+8)=+7$. E nada temos para justificar; subtrair números positivos ou naturais é a mesma coisa. Mas, observemos bem que, *para subtrair no gráfico C,* ***contamos para a esquerda.***

Segundo exemplo: $(-4)-(+15)$. Procuramos o ponto -4 no gráfico C, contamos 15 segmentos *para a esquerda* e acharemos -19. Portanto, $(-4)-(+15)=-19$. Eis um resultado que surpreende os estudantes; entretanto, é o que acontece na vida real.

Suponhamos que Antônio tem 42 a pagar e 38 a receber. Resolve liquidar suas contas, ficando a dever 4, isto é, -4. Acontece, porém, que alguém que lhe devia 15, desapareceu. E Antônio, privado daquele crédito de 15, isto é, $+15$, ficará devendo 19, em lugar de 4. Eis por que $(-4)-(+15)=-19$.

Na liquidação dos nossos débitos e créditos, a ***subtração*** *de um crédito nos é altamente prejudicial; diminui os nossos haveres.*

Terceiro exemplo: $(+3)-(-5)$. A partir do ponto $+3$, contamos 5 segmentos *para a direita* e acharemos $+8$. Portanto, $(+3)-(-5)=+8$. Eis aí outro resultado bastante singular, porém muito comum na vida real.

É o caso de Patrício que tem 31 a pagar e 34 a receber. Se liquidar suas contas, ficará com $+3$. Acontece, porém, que Patrício não encontra um dos seus credores, ao qual devia 5. Então, terminada a liquidação, Patrício fica com $+8$, isto é, 8. Eis porque $(+3)-(-5)=+8$.

Na liquidação dos nossos débitos e créditos, a ***subtração*** *de um débito nos é altamente favorável; aumenta os nossos haveres.*

Quarto exemplo: $(-7)-(-15)=+8$. A partir do ponto -7 contamos 15 segmentos *para a direita* e acharemos $+8$. Êste resultado se justifica facilmente como os anteriores.

Dêstes exemplos concluímos que:

a) *Subtrair um número* ***positivo*** *é contar para a* ***esquerda.*** (gráfico C)
b) *Subtrair um número* ***negativo*** *é contar para a* ***direita.*** (gráfico C)

E agora podemos estabelecer a seguinte

> ***Regra.*** **Para subtrair de um número relativo, outro número também relativo, é bastante trocar o sinal do segundo e somá-lo ao primeiro.**

Observação. De acôrdo com esta regra, temos:

$$(+5) - (-8) = (+5) + (+8) = +13$$

Ora, $(+8)$ é o simétrico de (-8). Logo,

De um número relativo subtrair outro número relativo é o mesmo que somar ao primeiro o simétrico do segundo.

Observemos mais que:

$$(+10) - (-10) = (+10) + (+10) = +20$$
$$(-10) - (+10) = (-10) - (-10) = -20$$

A diferença entre dois números simétricos é o dôbro do minuendo, em valor absoluto e com o mesmo sinal.

Exercício. Calcular a seguinte expressão:

$$(+8) - (+7) + (-9) - (-10) + (-5) + (-8) - (-25)$$

Já aprendemos que, para subtrair um número relativo, é bastante trocar-lhe o sinal, e depois somá-lo em lugar de subtraí-lo. Tomamos então a expressão dada e substituímos o sinal que indica subtração pelo sinal que indica adição, *tendo, porém, o cuidado de trocar o sinal dos números relativos que devem ser subtraídos.* Teremos:

$$(+8)-(+7)+(-9)-(-10)+(-5)+(-8)-(-25) =$$
$$(+8)+(-7)+(-9)+(+10)+(-5)+(-8)+(+25) =$$
$$(+8) + (+10) + (+25) = (+43)$$
$$(-7)+(-9) + (-5) + (-8) = (-29)$$
$$(+43) + (-29) = (+14)$$

Portanto, o valor da expressão dada é $(+14)$.

Exercícios. Série XIII

1. $(+37)-(-15)+(-84)+(+28)-(-19)+(+17) =$
2. $(-37)-(-42)+(-85)+(+43)-(+77)-(-88)+(+55) =$
3. $(+54)+(-87)-(-86)-(+85)+(-82)-(-75) =$
4. $(-123)+(-458)-(-736)+(+528)-(-898)+(-1345) =$
5. $(+67)+(-84)-(+519)+(-817)-(-731)-(-774) =$
6. $(+8)+(-15)+(-7)-(-8)+(+20)+(-8) =$
7. $(-37)-(-48)+(-59)+(+37)-(-54) =$

8. $(-36)+(-79)-(-79)+(+79)-(-84) =$

9. $(+615)+(-397)-(-853)+(-736)+(-615) =$

+ **10.** $(+43)+(-43)-(-75)-(+75)+(+512) =$ 1

III. Multiplicação

Já vimos que, na multiplicação de números inteiros, o multiplicador é um número abstrato que indica quantas vêzes o multiplicando deve ser tomado como parcela. Nestas condições,

$$(+8) \times 3 = (+8) + (+8) + (+8) = (+24)$$
$$(-8) \times 3 = (-8) + (-8) + (-8) = (-24)$$

Consideremos agora as expressões $(+8) \times (-3)$ e $(-8) \times \times (-3)$. Desde que o multiplicador é um número abstrato, (-3) significa que os multiplicandos $(+8)$ e (-8) *devem ser subtraídos três vêzes.* Logo,

$$(+8)\times(-3) = -(+8)-(+8)-(+8) = (-8)+(-8)+(-8) = (-24)$$
$$(-8)\times(-3) = -(-8)-(-8)-(-8) = (+8)+(+8)+(+8) = (+24)$$

$$\begin{aligned}(+8) \times (+3) &= (+24)\\ (-8) \times (+3) &= (-24)\\ (+8) \times (-3) &= (-24)\\ (-8) \times (-3) &= (+24)\end{aligned}$$

Examinando os quatro resultados ao lado concluímos que:

Regra. *O produto de dois números relativos,* ***com o mesmo sinal,*** *é um número positivo; o produto de dois números relativos,* ***com sinais contrários,*** *é um número negativo.*

IV. Divisão

A divisão é a operação que tem por fim, dados dois números, calcular um terceiro que, multiplicado pelo segundo, reproduza o primeiro. Logo,

$$(+24) \div (+3) = (+8) \text{ porque } (+8) \times (+3) = (+24)$$
$$(-24) \div (+3) = (-8) \text{ porque } (-8) \times (+3) = (-24)$$
$$(+24) \div (-3) = (-8) \text{ porque } (-8) \times (-3) = (+24)$$
$$(-24) \div (-3) = (+8) \text{ porque } (+8) \times (-3) = (-24)$$

Regra. *O quociente de dois números relativos,* ***com o mesmo sinal,*** *é um número positivo; o quociente de dois números relativos,* ***com sinais contrários,*** *é um número negativo.*

V. Potenciação

Já definimos a potência de um número. (§32) Na potenciação de números relativos devemos levar em consideração o sinal da base e a regra dos sinais. Assim é que:

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = +16$$
$$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$$

Uma potência com expoente par, de um número negativo, é um número positivo; com expoente ímpar é um número negativo.

Observação. Uma expressão da forma $(-2)(-3)(-4)\ldots$ significa $(-2) \times (-3) \times (-4)\ldots$

Exercícios. Série XIV

1. $(-8 \times (-5) \times (+12) \times (-1) \times (-20) = ?$ *Resp.* $(+9\,600)$
2. $(+36) \times (-14) \times (-63) \times (+5) \times (-5) \times (-45) = ?$ *Resp.* $(+35\,721\,000)$
3. $(-3) \times (-5) \times (-2) \times (-7) \times (-1) \times (+15) = ?$ *Resp.* $(-3\,150)$
4. $(-5) \times (+7) \times (-3) \times (+4) \times (-6) \times (+10) = ?$ *Resp.* $(-25\,200)$
5. $(-2) \times (+3) \times (-4) \times (-5) \times (+1) \times (-10) = ?$ *Resp.* $(+1\,200)$
6. $(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+(-2)^5+(-2)^6 = ?$ *Resp.* $(+42)$
7. $(-3)^1+(-3)^2+(-3)^3+(-3)^4+(-3)^5 = ?$ *Resp.* (-183)
8. $(-2)^2+(-3)^3+(-4)^2+(-5)^3 = ?$ *Resp.* (-132)
9. $(-6)^2+(-5)^3+(-4)^4+(-3)^5+(-2)^6 = ?$ *Resp.* (-12)
10. $(-10)^3+(-10)^2+(-10)^1+(+10)^3 = ?$ *Resp.* $(+90)$
11. $(-1)^1-(-1)^2+(-1)^3-(-1)^4+(-1)^5-(-1)^6 = ?$ *Resp.* (-6)
12. $(-2)^1+(-2)^2-(-2)^3+(-2)^4 = ?$ *Resp.* $(+26)$
13. $(-3)^2-(-3)^3+(-3)^4-(-3)^5 = ?$ *Resp.* $(+360)$
14. $(-2)^1-(-2)^2+(-2)^3-(-2)^4+(-2)^5 = ?$ *Resp.* (-62)
15. $(-2)^1-(-2)^2-(-2)^3-(-2)^4-(-2)^5-(-2)^6 = ?$ *Resp.* (-46)

Observação. A expressão $(-3)(+4)(-5)$ significa $(-3) \times (+4) \times (-5)$.

16. $(+10)+(-3)(+5)-(+2)(+7)-(-5)(+8)+(-3)(-1)(-5) = ?$ *Resp.* $(+6)$
17. $(-30)+(-1)(+6)-(-3)(-5)+(-8)(+3)+(+2)(-3)(-4) = ?$ *Resp.* (-51)
18. $(-3)^2+(-4)(-5)-(-2)^6+(-1)(-5)(+10) = ?$ *Resp.* $(+15)$
19. $(-1)(-2)(-3)(+4) - (-1)^4 - (-5)(-6)(+2)(+1) - (-2)^5 = ?$ *Resp.* (-53)
20. $(-8)(+5)+(-3)^4-(-3)^3-(+5)(-1)(+3)(-2) = ?$ *Resp.* $(+38)$
21. $(-2)(-3)^2+(-2)^4(+3)-(-5)^2(-1)+(-10)^2(+1) = ?$ *Resp.* $(+155)$
22. $(-10)^3+(-3)^4(+2)+(-2)^5(-1)+(-2)^6(-3) = ?$ *Resp.* (-998)
23. $(-2)^2(-3)^3-(-5)^2(-2)^4-(-1)(-2)^3(-3)^3+(-5)^4 = ?$ *Resp.* $(+333)$
24. $(-5)^2(-1)+(-2)(-3)^2(-4)^2-(-1)^5(-2)^3(-3) = ?$ *Resp.* $(+575)$
25. $(-1)(-2)^2(-3)^2(-5)-(-5)^2(-4)(-3)^2(-2)^1+1000 = ?$ *Resp.* (-620)

CAPÍTULO II

Divisibilidade Aritmética
Números Primos

50. Preliminares. Um número é divisível por outro, quando a sua divisão por êste outro não deixa resto. O número 24 é divisível por 3, porque o quociente exato da divisão de 24 por 3 é 8; 24 é um ***múltiplo*** de 3, e 3 é um ***fator, divisor, sub-múltiplo*** ou ***parte alíquota*** de 24.

Chama-se ***número primo absoluto,*** *o número que é divisível sòmente por si mesmo e pela unidade.* Os números 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc., são números primos.

Chama-se ***número composto*** (ou *não primo*) *o número que, além de ser divisível por si mesmo e pela unidade, é ainda divisível por um ou mais números diferentes de si mesmo e da unidade.* Os números 8, 15, 24, etc., são números compostos.

Convém observar que os divisores de um número inteiro qualquer são em número limitado, *sendo apenas dois,* quando o número é primo; entretanto, um número tem sempre uma infinidade de múltiplos. Consideremos, por exemplo, o número 7. Êste número tem apenas dois divisores, é um ***número primo;*** entretanto, tem uma infinidade de múltiplos, a saber: 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, etc..

Anàlogamente, os múltiplos de 13 são 0, 13, 26, 39, 52, 65, etc.. De um modo geral, todos os múltiplos de um número dado, são os produtos que se obtêm multiplicando sucessivamente o número dado por 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc..

Por exemplo, os múltiplos de 9 são os produtos 9×0, 9×1, 9×2, 9×3, 9×4, 9×5, 9×6, etc..

Existe um único número que tem uma infinidade de divisores; é o número ***zero.*** Com efeito, se dividirmos *zero* por qualquer número, o quociente é *zero* e o resto é *zero.* Desde

que $8 \times 0 = 0$, então $0 \div 8 = 0$. Anàlogamente, $13 \times 0 = 0 \therefore 0 \div 13 = 0$; $15 \times 0 = 0 \therefore 0 \div 15 = 0$.

Há uma diferença essencial entre um número primo e um número composto. O número composto pode ser substituído por um produto de dois ou mais fatôres, *diferentes de si mesmo e da unidade*, o que não é possível com um número primo. Por exemplo, $24 = 3 \times 8$; $36 = 4 \times 9$; $30 = 2 \times 3 \times 5$; etc.. Entretanto, não é possível fazer o mesmo com os números ***41, 53, 67***, etc..

Dois números são chamados ***primos entre si ou primos relativos,*** *quando têm sòmente um divisor comum que é a unidade.* Os números 8 e 9, 6 e 35, 10 e 33 são primos entre si.

Observação. O produto de dois números é múltiplo de cada um dêstes números. Assim, dado o produto

$$8 \times 5 = 40$$

40 é múltiplo de 8 ou de 5. Desta observação resulta imediatamente que, para verificar se um número dado ***a*** é múltiplo de outro número dado ***b***, é bastante dividir ***a*** por ***b***. Segundo a divisão fôr exata ou aproximada (§35) ***a*** será ou não será múltiplo de ***b***.

Exercícios. Série XV

1. Calcular os 5 menores múltiplos de 17, diferentes de zero.
2. Calcular os 8 menores múltiplos de 23, diferentes de zero.
3. Calcular os 10 menores múltiplos de 29, diferentes de zero.
4. Representar gràficamente o número 3 e os seus cinco menores múltiplos diferentes de zero.
5. Dado um segmento retilíneo AB, construir os seus cinco menores múltiplos diferentes de zero.
6. Qual é o menor múltiplo de 41, diferente de zero? E o maior?
7. Qual é o menor múltiplo de 53, diferente de zero? E o maior?
8. Traçar um segmento retilíneo com 24cm. Em seguida, traçar os segmentos retilíneos que representam todos os divisores de 24.
9. Dizer todos os divisores de 12, de 15, de 20, de 30, de 36.
10. Quais são os múltiplos de 7, compreendidos entre 72 e 130?
11. Quais são os divisores de 120, compreendidos entre 11 e 55?

51. Teoremas gerais da divisibilidade. (*) ***Teorema*** é a verdade matemática que exige prova. ***Axioma*** é a verdade matemática que não exige prova. Alguem nos diz: ***a soma é da mesma espécie das parcelas.*** Podemos duvidar desta afirmação? É claro que não. Então esta verdade é um ***axioma.***

(*) Na primeira série ginasial, o ensino da Aritmética deve ser prático. Entretanto, pensamos não haver inconveniente em iniciar os nossos alunos no conhecimento de alguns teoremas, aliás muito simples, como os que apresentamos neste paragrafo. É preciso semear para colhêr.

Alguém nos diz: ***todo o número que é divisor das parcelas, é também divisor da soma.*** Podemos duvidar desta afirmação? É claro que sim, e podemos exigir a prova desta afirmação. Então esta verdade se chama ***teorema,*** e ao processo para prová-la dá-se o nome de ***demonstração.***

Antes de estudarmos os principais teoremas gerais da divisibilidade, é necessário compreender bem o significado das seguintes frases; ***24 é divisível por 3; 3 divide 24.***

Quando dizemos que ***24 é divisível por 3,*** queremos dizer com estas palavras que a divisão de *24* por *3* é exata, (§35) sendo que ***o dividendo é 24 é o divisor é 3.***

Quando dizemos que ***3 divide 24,*** queremos dizer com estas palavras que a divisão de *24* por *3* é exata, sendo que ***o dividendo é 24 e o divisor é 3.***

Primeiro teorema. *O número que é divisor das parcelas, tambbém é divisor da soma.*

Consideremos a seguinte igualdade: $21 + 28 + 35 = x$. As três parcelas são divisveis por 7, ou 7 é divisor das três parcelas. Com efeito, $21 \div 7 = 3$; $28 \div 7 = 4$; $35 \div 7 = 5$. Logo,

$$21 = 7 + 7 + 7$$
$$28 = 7 + 7 + 7 + 7$$
$$35 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

Torna-se agora evidente que a soma dos números 21, 28 e 35 deve conter 12 vêzes o número 7. Realmente, calculando o valor de x e dividindo-o por 7, o quociente exato é 12. Como êste raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, êste está demonstrado.

Observação. Já aprendemos que:

minuendo = subtraendo + resto (§23)

E, de acôrdo com o teorema que acabámos de demonstrar resulta que: *Quando um número é divisor do subtraendo e do resto, é também divisor do minuendo.*

Segundo teorema. *Sendo uma soma formada por duas parcelas, se um número é divisor da soma e de uma das parcelas, também é divisor da outra.*

Consideremos a seguinte igualdade: $39 + x = 91$.

A parcela 39 e a soma 91 são divisíveis por 13, ou 13 é divisor da soma 91 e da parcela 39. Com efeito, $91 \div 13 = 7$ e $39 \div 13 = 3$. Logo,

$$91 = 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13$$
$$39 = 13 + 13 + 13$$

Torna-se agora evidente que a diferença entre os números 91 e 39, que é o valor de x, deve conter 4 vêzes o número 13. Realmente, dividindo-se êste valor por 13, o quociente exato é 4. Como êste raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, êste está demonstrado.

Observação. Voltando à igualdade

$$minuendo = subtraendo + resto$$

facilmente concluiremos que:

Quando um número é divisor do minuendo e do subtraendo, é também divisor do resto.

Terceiro teorema. *Sendo uma soma formada por duas parcelas, se um número é divisor de uma das parcelas, mas não é divisor da outra, então não é divisor da soma, e os restos das duas divisões são iguais.*

Consideremos a seguinte igualdade: $28 + 37 = x$. A primeira parcela é divisível por 7, sendo o quociente exato igual a 4; mas a segunda não o é, sendo o quociente incompleto igual a 5, e o resto igual a 2. Logo,

$$28 = 7 + 7 + 7 + 7$$
$$37 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 2$$

Torna-se agora evidente que a soma dos números 28 e 37 deve conter 9 *vêzes* o número 7 e mais 2 unidades. Realmente, calculando-se o valor de x, e dividindo-o por 7, o quociente incompleto é 9 e o resto é 2. Como êste raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, êste está demonstrado.

Quarto teorema. *Quando um número é divisor de outro, é também divisor de qualquer múltiplo dêste outro.*

O número 7 é divisor de 21. O número x é múltiplo de 21. Precisamos demonstrar que o número 7 é divisor de x.

O número x é múltiplo de 21, isto é, x contém 21 um número exato de vêzes. Portanto,

$$x = 21 + 21 + 21 + 21 + \ldots\ldots + 21$$

Ora, desde que o número 7 é divisor de 21, segue-se que êle é divisor de tôdas as parcelas da soma x. Mas, se o número 7 é divisor das parcelas, é também divisor da soma, em virtude do primeiro teorema. Como êste raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, êste está demonstrado.

Quinto teorema. *Quando um número é divisível por outro, é também divisível por qualquer fator dêste outro.*

O número x é divisível por 12 e o número 12 é divisível por 3. Vamos demonstrar que o número x é divisível por 3.

Com efeito, recorrendo ao quarto teorema, desde que 3 é divisor de 12, e x é múltiplo de 12, conclui-se imediatamente que 3 é divisor de x, ou x é divisível por 3. Como êste raciocínio pode ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, êste está demonstrado.

52. Caracteres de divisibilidade. Chamam-se ***caracteres de divisibilidade,*** certas regras que nos permitem verificar se um número é ou não é divisível por outro, ***sem efetuar a divisão.***

Dividiremos os caracteres de divisibilidade em dois grupos.

O primeiro grupo é constituído pelos caracteres que nos permitem verificar se um número qualquer é divisível por 2, por 5, por 10, ou por qualquer potência de 2, de 5 ou de 10.

O segunda grupo é constituído pelos caracteres que nos permitem verificar se um número qualquer é divisível por 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, etc., enfim, ***por qualquer número que não seja potência de 2, de 5 ou de 10.***

$$\begin{array}{c} 2^1 \times 5^1 = 10^1 \\ 2^2 \times 5^2 = 10^2 \\ 2^3 \times 5^3 = 10^3 \\ 2^4 \times 5^4 = 10^4 \\ 2^5 \times 5^5 = 10^5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

53. Primeiro grupo dos caracteres de divisibilidade. Em primeiro lugar, o estudante deve ler o quadro à esquerda, com a maior rapidez possível, e de duas maneiras diferentes: a princípio, sem calcular as potências e depois calculando-as. Por exemplo, a terceira linha deve ser lida assim: ***2 elevado à***

terceira potência, vêzes 5 elevado à terceira potência, é igual à 10 elevado à terceira potência. E depois: ***8 vêzes 125 é igual a 1 000.*** (§32)

Primeiro caracter. *Um número é divisível por* 2, *por* 5 *ou por* 10, *quando o número formado pelo primeiro algarismo da direita é divisível por* 2, *por* 5 *ou por* 10.

Um número inteiro qualquer pode sempre ser decomposto em duas parcelas, sendo a primeira terminada por ***um zero*** e a segunda constituída pelo algarismo das unidades. Por exemplo:

$$3\,457 = 3\,450 + 7$$

A primeira parcela, com um zero à direita, é divisível por 10 e, por conseqüência, por 2 e por 5. (quinto teorema de divisibilidade) Ora, se a segunda for divisível por 2, por 5 ou por 10, a soma 3 457 também o será. (primeiro teorema de divisibilidade) Entretanto, se a segunda não for divisível por 2, por 5 ou por 10, a soma também não o será, e os restos das duas divisões serão iguais. (terceiro teorema de divisibilidade)

Exemplo. O número 3 758 é divisível por 5? Não é, porque o número formado pelo primeiro algarismo da direita não é divisível por 5, sendo o resto igual a 3. E se dividirmos o número 3 758 por 5, o resto será também igual a 3.

Os números formados por um algarismo, divisíveis por 2, são 2, 4, 6, 8 e 0; divisíveis por 5 são 5 e 0; o único divisível por 10 é 0. É por isto que se costuma desdobrar o primeiro caracter de divisibilidade, em três, a saber: ***um número é divisível por 2,*** *quando termina em* 2, 4, 6, 8 *ou* 0; ***por 5,*** *quando termina em* 5 *ou* 0; ***por 10,*** *quando termina em* 0.

Os números divisíveis por 2 são chamados ***números pares;*** os não divisíveis por 2 são chamados ***números ímpares.***

Segundo caracter. *Um número é divisível por* 4 (2^2), *por* 25 (5^2) *ou por* 100 (10^2), *quando o número formado pelos dois primeiros algarismos da direita é divisível por* 4, *por* 25, *ou por* 100.

Um número inteiro qualquer pode sempre ser decomposto em duas parcelas, sendo a primeira terminada por dois zeros, e a segunda constituída pelos dois primeiros algarismos da direita. Por exemplo:

$$4\,653 = 4\,600 + 53$$

Isto pôsto, e raciocinando como no caso anterior, com aplicação dos mesmos teoremas de divisibilidade, teremos justificado êste segundo caracter.

Exemplo. O número 3 478 é divisível por 25? Não é, porque o número formado pelos dois primeiros algarismos da direita, isto é, 78, não é divisível por 25, sendo o resto igual a 3. E se dividirmos 3 478 por 25, o resto será 3.

Os números divisíveis por 25 são os números que terminam (à direita) por 25, 50, 75 ou 00. Os números divisíveis por 100 são os números que terminam (à direita) por 00.

Terceiro caracter. *Um número é divisível por* 8 (2^3), *por* 125 (5^3) *ou por* 1 000 (10^3), *quando o número formado pelos três primeiros algarismos da direita é divisível por* 8, *por* 125 *ou por* 1 000.

Um número inteiro qualquer pode sempre ser decomposto em duas parcelas, sendo a primeira terminada por três zeros e a segunda constituída pelos três primeiros algarismos da direita. Por exemplo:

$$47\,384 = 47\,000 + 384$$

Êste terceiro caracter se justifica como os dois anteriores.

Exemplo. O número 47 384 é divisível por 8? É, porque o número formado pelos três primeiros algarismos da direita, isto é, 384, é divisível por 8. É divisível por 125? Não é, porque o número formado pelos três primeiros algarismos da direita, isto é, 384, não é divisível por 125, sendo o resto igual a 9. E se dividirmos o número 47 384 por 125, o resto será 9.

Observação. Se os três caracteres de divisibilidade que acabámos de explicar, foram compreendidos, é fácil concluir que êste primeiro grupo de caracteres é ilimitado. Com efeito, estamos habilitados a dizer quando é que um número é divisível por 2^1, 5^1, 10^1; ou 2^2, 5^2, 10^2; ou 2^3, 5^3, 10^3; e assim por diante. E estamos também habilitados a provar o que afirmamos. Entretanto, êstes caracteres, a partir de certo ponto, se tornam inúteis. Por exemplo, o número 7 486 é divisível por 32? O número 32 é a quinta potência de 2. Então é necessário dividir por 32, o número formado pelos cinco primeiros algarismos do número dado. Logo, só é possível obter o resto da divisão de 7 486 por 32, pelo processo espontâneo, isto é, efetuando a divisão.

Também é útil observar que a divisibilidade de um número qualquer por 2^1, 5^1, 10^1, depende ***do número formado pelo primeiro algarismo*** da direita; por 2^2, 5^2, 10^2, depende ***do número formado pelos dois primeiros algarismos*** da direita; por 2^3, 5^3, 10^3 depende ***do número formado pelos três primeiros algarismos*** da direita, e assim por diante.

54. Segundo grupo dos caracteres de divisibilidade.

Primeiro caracter. *Um número é divisível por* 3 *quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos* (§ 15) *é divisível por* 3.

Exemplo: O número 475 268 é divisível por 3?

$4 + 7 + 5 + 2 + 6 + 8 = 32$ $\quad$ $32 \div 3 = 10$ e restam 2.

Logo, o número 475 268 não é divisível por 3, sendo o resto da divisão igual a 2, como se pode verificar, efetuando-se a divisão.

Segundo caracter. *Um número é divisível por 9, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 9.*

Exemplo: O número 345 748 é divisível por 9?

$3 + 4 + 5 + 7 + 4 + 8 = 31 \qquad 31 \div 9 = 3$ e restam 4.

Logo, o número 345 748 não é divisível por 9, sendo o resto da divisão igual a 4, como se pode verificar, efetuando-se a divisão.

Terceiro caracter. *Um número é divisível por 11, quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar, menos a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem par, é divisível por 11.*

Os algarismos de ordem ímpar são o 1.º, o 3.º, o 5.º, etc., a partir da direita, isto é, do algarismo das unidades; os de ordem par são o 2.º, o 4.º, o 6.º, etc., a partir também da direita.

Exemplo: O número 7 384 206 é divisível por 11?

$$(6 + 2 + 8 + 7) - (0 + 4 + 3) = 23 - 7 = 16$$
$$16 \div 11 = 1 \text{ e restam } 5.$$

Logo, o número 7 384 206 não é divisível por 11, sendo o resto da divisão igual a 5, como se pode verificar, efetuando-se a divisão.

Às vêzes, a primeira soma é menor do que a segunda. Então juntam-se à primeira tantos *onzes* quantos sejam necessários para que se torne maior do que a segunda.

Exemplo: O número 73 827 092 é divisível por 11?

$$(2 + 0 + 2 + 3) - (9 + 7 + 8 + 7) = 7 - 31$$
$$(7 + 11 + 11 + 11) - 31 = 40 - 31 = 9$$
$$9 \div 11 = 0 \text{ e restam } 9.$$

Logo, o número 73 827 092 não é divisível por 11, sendo o resto igual a 9, como se pode verificar, efetuando-se a divisão.

Existem também caracteres de divisibilidade por 13, 17, etc.. Entretanto, são tão complicados que é preferível efetuar a divisão.

N. B. A demonstração completa dos caracteres de divisibilidade que constituem o segundo grupo, não pode ser dada neste compêndio, pela dificuldade que oferece.

55. A regra dos noves fora. A divisão é a operação que tem por fim calcular quantas vêzes um número contém outro, ou repartir um número em partes iguais, de acôrdo com o problema dado. Entretanto, não levando em conta o problema dado, podemos dizer que a divisão é a operação que tem por fim calcular quantas vêzes um número contém outro. Nestas condições, o resultado da divisão, isto é, o quociente, seja êle exato ou incompleto (§ 35) pode ser obtido por meio de uma série de subtrações.

Como exemplo, vamos dividir 87 por 15. Teremos:

$87-15=72$; $72-15=57$; $57-15=42$; $42-15=27$; $27-15=12$.

Efetuamos ***cinco subtrações.*** Portanto, o quociente incompleto da divisão de 87 por 15 é 5, e o resto é 12.

Conclui-se que, assim como a multiplicação é uma adição abreviada, a divisão é a abreviação de uma série de subtrações. Vamos agora verificar se o número 45 625 é divisível por 9. A soma dos valores absolutos de seus algarismos é 22. Dividamos esta soma por 9, recorrendo à subtração. Teremos: $22-9=13$; $13-9=4$. Portanto, o quociente incompleto da divisão de 22 por 9 é 2, e o resto é 4.

Mas, em lugar de somar os valores absolutos de todos os algarismos do número dado e, depois, subtrair 9 desta soma, tantas vêzes quantas for possível, podemos subtrair 9, tôdas as vêzes que a soma atingir a 9, ou exceder de 9. É o que vamos tornar claro com o seguinte exemplo.

O número 37 587 684 é divisível por 9? $3+7=10$, noves fora 1; $1+5=6$; $6+8=14$, noves fora 5; $5+7=12$, noves fora 3; $3+6=9$, noves fora 0; $8+4=12$, noves fora 3. O número dado não é divisível por 9, sendo o resto da divisão igual a 3. A êste processo para achar o resto da divisão de um número qualquer por 9, é que se dá o nome de ***regra dos noves fora.***

56. Prova da adição pelos restos. ***Regra.*** *Calcula-se o resto da divisão de cada uma das parcelas, pelo divisor escolhido; somam-se êstes restos e calcula-se o resto da divisão da soma dos restos pelo mesmo divisor escolhido; depois calcula-se o resto da divisão da soma primitiva pelo mesmo divisor escolhido. Se os dois últimos restos forem iguais, é provável que a adição esteja certa.*

PRIMEIRO EXEMPLO

Prova pelo divisor 9

	7 456	4	
	8 374	4	
	637	7	
	2 346	6	
	537	6	
0	19 350	27	0

SEGUNDO EXEMPLO

Prova pelo divisor 11

	3 456	2	
	7 293	0	
	547	8	
	6 185	3	
	2 346	3	
5	19 827	16	5

À direita de cada parcela figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido; à direita da soma dos restos figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido; à esquerda da soma primitiva figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido. Os dois restos que devem ser iguais estão sublinhados com dois traços.

Exercícios. Série XVI

1. 37 548 + 96 753 + 8 877 + 123 548 + 62 375 + 7 983 + 5 746 = ? Tirar a prova com o divisor 11.

2. Repetir a mesma adição e tirar a prova com o divisor 9.

3. Repetir a mesma adição e tirar a prova com o divisor 7.

4. Repetir a mesma adição e tirar a prova com o divisor 6.

57. Prova da subtração pelos restos. Lembremos que o minuendo é uma soma constituída por duas parcelas, a saber: o subtraendo e o resto. (§ 23) Portanto, a prova de uma subtração por meio de um divisor qualquer, pode ser tirada de acôrdo com a seguinte

Regra. *Calcula-se o resto da divisão do subtraendo e, depois, do resto, pelo divisor escolhido; somam-se os dois restos e calcula-se o resto da divisão desta soma, pelo mesmo divisor escolhido; em seguida, calcula-se o resto da divisão do minuendo, pelo mesmo divisor escolhido. Se os dois últimos restos forem iguais, é provável que a subtração esteja certa.*

PRIMEIRO EXEMPLO

Prova pelo divisor 9

318 472		7
153 829	1	
164 643	6	7

SEGUNDO EXEMPLO

Prova pelo divisor 11

318 976		9
153 829	5	
165 147	4	9

À direita do minuendo, do subtraendo e do resto figura o resto da divisão de cada um dêstes números, pelo divisor esco-

lhido. Os dois restos, que devem ser iguais, estão sublinhados com dois traços.

Exercícios. Série XVII

1. 718 293 − 547 625 = ? Tirar a prova com o divisor 9.
2. Mesma operação e prova com o divisor 11.
3. Mesma operação e prova com o divisor 7.
4. Mesma operação e prova com o divisor 6.
5. Mesma operação e prova com o divisor 12.

58. Prova da multiplicação pelos restos. ***Regra.*** *Calcula-se o resto da divisão de cada um dos fatôres, pelo divisor escolhido, e multiplicam-se os dois restos; depois calcula-se o resto da divisão dêste produto pelo mesmo divisor escolhido; finalmente calcula-se o resto da divisão do produto primitivo pelo mesmo divisor escolhido. Se os dois últimos restos forem iguais, é provável que a multiplicação esteja certa.*

PRIMEIRO EXEMPLO
(*Prova pelo divisor* 9)

$$\begin{array}{r r r}
27\,583 & 7 & \\
\times\, 487 & \times\, 1 & \\
\hline
193\,081 & 7 & \underline{\underline{7}} \\
2\,206\,64 & & \\
11\,033\,2 & & \\
\hline
13\,432\,921 & & \underline{\underline{7}}
\end{array}$$

SEGUNDO EXEMPLO
(*Prova pelo divisor* 11)

$$\begin{array}{r r r}
27\,583 & 6 & \\
\times\, 487 & \times\, 3 & \\
\hline
193\,081 & 18 & \underline{\underline{7}} \\
2\,206\,64 & & \\
11\,033\,2 & & \\
\hline
13\,432\,921 & & \underline{\underline{7}}
\end{array}$$

À direita do multiplicando figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido; à direita do multiplicador figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido; à direita do produto dêstes dois restos figura o resto da divisão dêste produto pelo divisor escolhido; à direita do produto primitivo figura o resto da sua divisão pelo divisor escolhido. Os dois restos que devem ser iguais estão sublinhados com dois traços.

$$\begin{array}{r}
347 \\
\times 58 \\
\hline
2\,776 \\
17\,35 \\
\hline
20\,126 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
5 & 2 \\
\hline
4 & 2
\end{array}$$

Na prática, podemos dar à prova da multiplicação, pelos restos, a disposição que vamos indicar. Traçamos dois segmentos perpendiculares entre si. Seja 9 o divisor escolhido. Nos dois ângulos retos da esquerda, escrevemos os restos das divisões, por 9, dos dois fatôres dados, isto é, 5 (resto do multiplicando) e 4 (resto do multipli-

cador). Multiplicando 5 por 4 acharemos 20, cujo resto, na divisão por 9, é 2, que escrevemos no ângulo reto de cima, à direita. Finalmente, por baixo dêste resto, escrevemos o resto da divisão, por 9, do produto da multiplicação, isto é, de 20 126.

Exercícios. Série XVIII

1.	37 548 × 6 239 = ?	Prova pelo divisor 9.
2.	29 372 × 7 082 = ?	Prova pelo divisor 11.
3.	478 645 × 375 = ?	Prova pelo divisor 7.
4.	143 586 × 8 070 = ?	Prova pelo divisor 6.
5.	67 009 × 4 073 = ?	Prova pelo divisor 12.

59. Resto de uma expressão aritmética. *Primeiro exemplo.* Calcular o resto da divisão, por 9, da expressão aritmética seguinte, sem efetuar a adição.

$$374 + 5\,847 + 236 + 5\,209$$

O resto de uma soma é igual ao resto da soma dos restos das parcelas, desde que o divisor empregado seja sempre o mesmo. (§ 56) Portanto, calcula-se o resto da divisão de cada uma das parcelas, pelo divisor escolhido, somam-se os restos e calcula-se o resto da divisão da soma dos restos, pelo mesmo divisor escolhido.

A disposição prática dêste exercício pode ser a seguinte:

$$\begin{array}{ccccccccl} 374 & + & 5\,847 & + & 236 & + & 5\,209 & & \\ 5 & + & 6 & + & 2 & + & 7 & & = 20 \end{array}$$

O resto da divisão por 9, da expressão dada, é o resto da divisão de 20 por 9; é 2.

Segundo exemplo. Calcular o resto da divisão, por 11, da expressão aritmética seguinte, sem efetuar a multiplicação.

$$478 \times 3\,427 \times 58$$

O resto de um produto é igual ao resto do produto dos restos dos fatôres, desde que o divisor empregado seja sempre o mesmo. (§ 58) Então calcula-se o resto da divisão de cada um dos fatôres, pelo divisor escolhido, multiplicam-se os restos e calcula-se o resto da divisão do produto dos restos pelo mesmo divisor escolhido.

A disposição prática dêste exercício pode ser a seguinte:

$$478 \times 3\,427 \times 58$$
$$5 \times 6 \times 3 = 90$$
$$(0 + 11) - 9 = 11 - 9 = 2$$

O resto da divisão, por 11, da expressão dada, é 2.

Terceiro exemplo. Calcular o resto da divisão, por 9, da expressão aritmética seguinte, sem efetuar as operações indicadas.

$$375 \times 85 + 786 + 478 \times 79 \times 508 + 2\,345$$

Esta espressão é uma soma constituída por 4 parcelas. Mas, a primeira e a terceira parcelas são produtos. Então é necessário aplicar as regras dos §§ 56 e 58, para obter o resto da divisão, por 9, desta expressão.

A disposição prática dêste exercício pode ser a seguinte:

$$375 \times 85 + 786 + 478 \times 79 \times 508 + 2\,345$$
$$6 \times 4 + 3 + 1 \times 7 \times 4 + 5$$
$$24 + 3 + 28 + 5$$
$$6 + 3 + 1 + 5 = 15$$

O resto da divisão, por 9, da expressão dada, é o resto da divisão de 15 por 9; é 6.

Exercícios. Série XIX

Calcular o resto das expressões que se seguem, pelo divisor indicado, ***sem calcular o valor da expressão.***

1. $293+5\,788+854+7\,081$; resto por 11.
2. $728\,590-234\,618$; resto por 11.
3. $579\times428\times319$; resto por 9.
4. $567+847+328$; resto por 11.
5. $78\,162-4\,537$; resto por 11.
6. $1\,234\times5\,786\times2\,349\times74$; resto por 11.
7. $235+548-643$; resto por 9.
8. $75-83+172-43$; resto por 11.
9. $47\times58\times93\times54$; resto por 9.
10. $847+316\times56+47\times148\times3\,146$; resto por 9.
11. $7\,242\times293-6\,328\times57$; resto por 11.
12. $7\,548^2$; resto por 9.
13. $6\,275^3$; resto por 11.
14. $37^2+56^3+4\,763^4$; resto por 9.

60. Prova da divisão pelos restos. *Primeiro exemplo.* Já sabemos que o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente e mais o resto. Portanto, 378 546 = 427 × 886 + + 224. É claro que, se dividirmos ambos os membros desta igualdade, por um mesmo número, os restos devem ser iguais. A disposição desta prova pode ser a seguinte:

$$\begin{array}{l|l} 378\,546 & 427 \\ \cline{2-2} 36\,94 & 886 \\ \ \ 2\,786 & \\ \ \ \ \ 224 & \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Prova pelo} \\ \textit{divisor } 9 \end{array}\right\} \begin{array}{ccc} 378\,546 & = & 427 \times 886 + 224 \\ \downarrow & & 4 \times 4 + 8 \\ & & 16 + 8 \\ & & 7 + 8 \\ \underline{\underline{6}} & & \underline{\underline{6}} \end{array}$$

Segundo exemplo. Tiremos a prova da mesma divisão pelo divisor 11.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Prova pelo} \\ \textit{divisor } 11 \end{array}\right\} \begin{array}{ccc} 378\,546 & = & 427 \times 886 + 224 \\ \downarrow & & 9 \times 6 + 4 \\ & & 54 + 4 \\ & & 10 + 4 \\ \underline{\underline{3}} & & \underline{\underline{3}} \end{array}$$

Na prática, podemos dar a esta prova a disposição que vamos indicar. Seja 9 o divisor escolhido.

$$\begin{array}{l|l l} 378\,546 & 427 & \begin{array}{c|c} 4 & 6 \\ \hline 4 & 6 \end{array} \\ \cline{2-2} 36\,94 & 886 & \\ \ \ 2\,786 & & \\ 16 \rightarrow 224 & & \end{array}$$

O primeiro 4, no alto e à esquerda da cruz, é o resto do divisor; o segundo 4 é o resto do quociente. Multipliquemos êstes dois restos; o produto é 16, que escrevemos à esquerda do resto da divisão. Em seguida, calculamos o resto da divisão, por 9, de 16 → 224, como se se tratasse do número 16 224; êste resto é 6, que escrevemos no alto e à direita da cruz. Finalmente, calculamos o resto da divisão, por 9, do dividendo 378 546.

Observação. Convém dar aos estudantes algumas divisões a efetuar, para que se exercitem bastante na prova pelos restos.

61. Números primos. Os números primos de 1 a 101 são 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59,

61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 e 101. Para facilidade do que se segue, convém decorar esta sucessão; é bastante contar de 1 a 101, tendo o cuidado de:

a) suprimir os múltiplos de 2, de 3 e de 5, que são facilmente reconhecíveis;

b) suprimir os números 49, 77 e 91, porque $49 = 7 \times 7$, $77 = 7 \times 11$ e $91 = 7 \times 13$.

62. Crivo de Eratóstenes. É o processo empregado para descobrir todos os números primos, desde 1 até um número qualquer. Como exemplo, vamos calcular todos os números primos, de 1 a 1 000.

Em primeiro lugar, escrevemos a sucessão dos números naturais, de 1 a 1 000. Ora, é evidente que, se contarmos de 2 em 2, a saber, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, etc., todos os números encontrados serão compostos, por serem divisíveis por 2, excetuando-se o número 2, que é primo, por ser divisível sòmente por si e pela unidade.

Se contarmos de 3 em 3, a saber, 3, 6, 9, 12, 15, etc., todos os números encontrados serão compostos por serem divisíveis por 3, exceto o número 3, que é primo, por ser divisível sòmente por si e pela unidade. Assim, depois de escrita a sucessão dos números naturais, desde 1 até 1 000, contamos de 2 em 2, de 3 em 3, de 5 em 5, de 7 em 7, de 11 em 11, etc., e cancelamos todos os múltiplos de 2, de 3, de 5, de 7, de 11, etc., *tendo o cuidado de não cancelar* os números 2, 3, 5, 7, 11, etc., por serem primos. É inútil contar de 4 em 4, de 6 em 6, de 8 em 8, de 9 em 9, etc., porque os números que encontramos no decorrer da operação já estarão cancelados, por serem múltiplos de 2, de 3, etc.. (§51, quinto teorema de divisibilidade)

A operação pode ser simplificada. Por exemplo, para cancelar os múltiplos de 13, é inútil contar de 13 em 13, desde o número 1. Procuramos o número 13×13, isto é, 169, cancelamos êste número e começamos a contar de 13 em 13, depois do número 169, isto é, a partir de 170. Com efeito, os doze primeiros múltiplos de 13, isto é, 13×1, 13×2, 13×3, $13 \times \times 4$, 13×5, ... 13×12, já estão cancelados, exceto 13×1, por serem múltiplos de 2 ou de 3 ou de 5 ou de 7 ou de 11.

No nosso exemplo, a operação estará terminada, quando tivermos de contar de 37 em 37, porque $37 \times 37 = 1\,369$, e último têrmo da sucessão é 1 000. E todos os números que não tiverem sido cancelados, serão números primos. (*)

63. Regra para verificar se um número é primo ou composto. O número 1 301 é primo ou composto? Eis uma pergunta à qual não é possível responder imediatamente. Na verdade o número 1 301 não é divisível por 2, 3, 5, 7 e 11. Entretanto, não podemos afirmar que seja primo, porque pode ser divisível por 19 ou 23 ou 29, etc.. Empregar o crivo de Eratóstenes, ùnicamente para verificar se o número 1 301 é primo ou composto, é coisa muito demorada. Felizmente, há uma regra que nos permite verificar ràpidamente se um número é primo ou composto. Antes, porém, de a aprendermos, é necessário insistir sôbre alguns fatos da divisibilidade.

Se dividirmos 112 por 7, o quociente exato é 16. Logo, $112 = 7 \times 16$, e 112 *é também divisível por* 16.

Convém também observar que, quando um número não é divisível por 2, não é divisível pelos múltiplos de 2, a saber, 4, 6, 8, 10, 12, etc.. Porque, se fôsse divisível por 4, seria também divisível por 2. (quinto teorema de divisibilidade, § 51) Anàlogamente, quando um número não é divisvel por 3, não é divisível pelos múltiplos de 3. De um modo geral, quando um número qualquer não é divisível por um número primo, não é divisível pelos múltiplos dêste número primo.

Para verificar se um número é primo, é bastante dividí-lo por 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., etc., isto é, pela sucessão dos números primos, ***até que o quociente seja menor que o divisor, ou igual ao divisor.*** Se tôdas as divisões deixarem resto, o número dado é primo.

Exemplo. Verificar se o número 1 301 é primo ou composto.

1 301	13	1 301	17	1 301	19	1 301	23
001	100	111	76	161	68	151	56
		09		09		13	

(*) Êste exercício deve ser feito por todos os estudantes, e os resultados deverão ser cuidadosamente verificados pelo professor, o qual aproveitará o ensejo para recordar os numerosos fatos da divisibilidade.

1 301 | 29 141 44 25	1 301 | 31 061 41 30	1 301 | 37 191 35 06	*Resposta. O número 1 301 é primo.*

Na prática, é inútil dividir o número dado por 2, 3, 5 e 11, porque os caracteres de divisibilidade nos permitem dizer de pronto se êle é ou não é divisível por 2, 3, 5 e 11. A divisão por 7 pode ser feita mentalmente. Portanto, a primeira divisão tem como divisor o número 13. Observemos que os quocientes vão diminuindo sucessivamente. Ora, se a divisão por 37 deu um quociente 35, ***menor que 37***, podemos afirmar que o número 1 301 é primo. Porque, se o número 1 301 admitisse um divisor, ***necessàriamente maior que 37***, então o número 1 301 seria também divisível pelo quociente, ***necessàriamente menor que 35***. Mas, vimos que o número 1 301 *não admite divisores inferiores a* 35; *logo, não admite divisores superiores a* 37 e, por consequência, é realmente primo.

Exercícios. Série XX

Verificar se os números que se seguem são primos ou compostos.

1. 691	**5.** 1 333	**9.** 2 419	**13.** 1 487
2. 1 927	**6.** 2 021	**10.** 1 697	**14.** 2 491
3. 1 009	**7.** 1 591	**11.** 2 039	**15.** 2 747
4. 899	**8.** 1 217	**12.** 1 517	**16.** 2 713

64. Decomposição em fatores primos. *Decompor um número em seus fatôres primos é transformá-lo em um produto de fatôres primos.* Por exemplo, decompor o número 30 em seus fatôres primos é substituí-lo pelo produto $2 \times 3 \times 5$; decompor o número 210 em seus fatôres primos é substituí-lo pelo produto $2 \times 3 \times 5 \times 7$.

Os fatôres primos que compõem o número dado podem ser iguais ou desiguais. Por exemplo, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ou $24 = 2^3 \times 3$. O número 24 é constituído por quatro fatôres primos, sendo três dêles iguais a 2 e o quarto igual a 3.

Tratando-se de números pequenos, a sua decomposição em fatôres primos pode ser feita mentalmente; tratando-se, porém, de números grandes, a operação obedece à seguinte

Regra. *Para decompor um número em seus fatôres primos, divide-se o número dado pelo seu menor divisor primo; depois*

divide-se o quociente pelo seu menor divisor primo; em seguida divide-se o novo quociente pelo seu menor divisor primo; e assim, sucessivamente, até que o último quociente seja a unidade. O número dado é igual ao produto de todos os divisores.

Exemplo. Decompor o número 1 260 em seus fatôres primos.

A operação pode ser feita de duas maneiras diferentes.

Primeira forma

1 260	2					
06	630	2				
00	03	315	3			
	10	015	105	3		
	0	0	15	35	5	
			0	0	7	7
					0	1

Segunda forma

1 260	2
630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Resposta. $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Exercícios orais

Decompor os números que se seguem, em seus fatores primos.

1. 15	**5.** 20	**9.** 30	**13.** 52	**17.** 60	**21.** 90
2. 42	**6.** 28	**10.** 48	**14.** 56	**18.** 75	**22.** 120
3. 60	**7.** 42	**11.** 54	**15.** 69	**19.** 78	**23.** 150
4. 72	**8.** 45	**12.** 66	**16.** 80	**20.** 84	**24.** 180

Exercícios. Série XXI

Decompor em fatores primos os números que se seguem.

1. 9 085	**6.** 10 500	**11.** 16 310
2. 10 240	**7.** 29 260	**12.** 16 790
3. 9 310	**8.** 22 610	**13.** 36^4
4. 18 018	**9.** 23 270	**14.** $20^3 \times 33^4$
5. 92 300	**10.** 16 360	**15.** $6^2 \times 10^3 \times 14^4$

65. Divisão de um produto indicado por um de seus fatôres. Vimos no parágrafo anterior que:

$$1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \quad \therefore \quad 1\,260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

Esta igualdade pode ser escrita de vários modos, em virtude da lei associativa da multiplicação. (§30)

$$1\,260 = 2\times (2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7)$$
$$1\,260 = 3 \times (2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7)$$
$$1\,260 = 5 \times (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7)$$
$$1\,260 = 7 \times (2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5)$$
$$1\,260 = (2 \times 3) \times (2 \times 3 \times 5 \times 7)$$
$$1\,260 = (2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3 \times 7)$$

Enfim, todos os fatôres primos de 1 260 podem ser reünidos em *dois grupos de fatôres*, ou então, 1 260 pode ser reduzido a *um produto de dois fatôres*. Ora, se dividirmos um produto de dois fatôres por um dêles, o quociente é o outro. Logo,

$$1\,260 \div 2 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$1\,260 \div 5 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$$
$$1\,260 \div (2 \times 3) = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$1\,260 \div (2 \times 3 \times 5) = 2 \times 3 \times 7$$

Chegamos assim a uma conclusão muito simples e muito útil: *para dividir um produto indicado por um de seus fatôres, ou pelo produto de dois ou mais dos seus fatôres, é bastante suprimir êste fator ou êstes fatôres.*

$$(3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) \div (3 \times 5 \times 11) = 3 \times 7 \times 13$$

Seja agora o produto $7 \times 15 \times 19$, que queremos dividir por 3. O produto dado não contém o fator 3, mas contém o fator 15, que pode ser substituído por 5×3, visto que a multiplicação é também uma operação *dissociativa*. Logo,

$$(7\times15\times19)\div3=(7\times5\times3\times19)\div3 \;\therefore\; (7\times15\times19)\div3=7\times5\times19$$

Anàlogamente, $(7 \times 40 \times 11 \times 13) \div 8 = 7 \times 5 \times 11 \times 13$

E assim por diante. Donde se conclui que: *para dividir um produto indicado por um número qualquer, é bastante dividir um dos fatôres por êste número, se a divisão for possível.*

Exercícios orais

1. $(7\times8\times9)\div8 = ?$
2. $(3\times4\times5\times6)\div5 = ?$
3. $(4\times5\times7\times8)\div8 = ?$
4. $(2^2\times3\times5^2\times7)\div5 = ?$
5. $(2\times3^2\times5)\div6 = ?$
6. $(2^2\times3^2\times5)\div10 = ?$
7. $(3\times5^2\times7)\div15 = ?$
8. $(2\times5^2\times7)\div14 = ?$
9. $(3\times5^2\times7)\div35 = ?$
10. $(3\times15\times17)\div5 = ?$
11. $(11\times18\times23)\div9 = ?$
12. $(23\times30\times7)\div15 = ?$

66. Quando um número é divisível por dois números primos entre si, é também divisível pelo produto dêles. Consideremos o número 936. Êste número é divisível por 4 e por 9. Decompondo os números 4 e 9 em seus fatôres primos, teremos $4 = 2 \times 2$ e $9 = 3 \times 3$. Portanto, 4 e 9 não têm um divisor comum e são, por conseqüência, primos entre si.

Ora, se o número 936 é divisivel por 4 e por 9, deve conter os fatôres de 4 e 9. (§ 64)

Com efeito, decompondo 936 em seus fatôres primos, teremos:

$$936 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 13 \quad \therefore \quad 936 = (2 \times 2 \times 3 \times 3) \times (2 \times 13)$$

E, de acôrdo com o § 65, teremos:

$$936 \div (2 \times 2 \times 3 \times 3) = 2 \times 13 \therefore 936 \div 36 = 26$$

Do exposto, resulta que:

> **Um número é divisível por 6, quando é divisível por 2 e por 3; é divisível por 12, quando é divisível por 3 e por 4; por 15, quando é divisível por 3 e por 5; e assim por diante.**

Mas, um número divisível por 4 e por 6 pode ser ou não ser divisível por 24, porque 4 *e* 6 *não são primos entre si.*

67. Divisores de um número. Consideremos o número 1 260. De acôrdo com os caracteres de divisibilidade, êste número é divisível por 2, 3, 4, 5, 9 e 10. Também é fácil reconhecer que é divisível por 7. E, de acôrdo com o § 66, é também divisível por 2×3, por 3×5, por 3×7, por 5×7, por $2 \times 3 \times 5$, por $2 \times 3 \times 3 \times 5$, isto é, por 6, 15, 21, 35, 30, 90, etc.. Mas, quais são então todos os divisores de 1 260? Quantos são? Como determiná-los?

Seja o número 16 200. Decompondo-o em fatôres primos, acharemos:

$$16\,200 = 2^3 \times 3^4 \times 5^2$$

Os divisores de 2^3, ***além da unidade, são*** 2, 4 e 8.
Os divisores de 3^4, ***além da unidade, são*** 3, 9, 27 e 81.
Os divisores de 5^2, ***além da unidade, são*** 5 e 25.

Temos, portanto, para o número 16 200, os seguintes grupos de divisores:

1.°) → 1, 2, 4, 8.......... → $3 + 1 = 4$ divisores
2.°) → 1, 3, 9, 27, 81 ..... → $4 + 1 = 5$ »
3.°) → 1, 5, 25............ → $2 + 1 = 3$ »

Já aprendemos que, *quando um número é divisível por outros dois, primos entre si, é também divisível pelo produto dêles.* (§ 66) Cada um dos divisores do primeiro grupo, é primo com cada um dos divisores do segundo grupo.

Portanto, se multiplicarmos cada um dos divisores do primeiro grupo por cada um dos divisores do segundo grupo, teremos $(3 + 1) \times (4 + 1)$ *divisores do número* 16 200.

Mas, cada um dêstes $(3 + 1) \times (4 + 1)$ divisores é, por sua vez, primo com cada um dos divisores do terceiro grupo. Portanto, se multiplicarmos cada um dêstes $(3 + 1) \times (4 + 1)$ divisores, por cada um dos divisores do terceiro grupo, teremos, ao todo, $(3 + 1) \times (4 + 1) \times (2 + 1)$ *divisores do número* 16 200.

O exposto é suficiente para estabelecer a seguinte

Regra. *Para calcular o número de divisores de um número dado, decompõe-se êste número em seus fatôres primos, soma-se uma unidade ao expoente de cada um dêstes fatôres e multiplicam-se estas somas. O produto representa o número de divisores do número dado.*

Exemplo. Quantos divisores tem o número 12 600?

12 600	2
6 300	2
3 150	2
1 575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$$12\,600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$$

N.° dos divisores = $(3+1)\times(2+1)\times(2+1)\times(1+1)$
N.° dos divisores = $4\times3\times3\times2$
N.° dos divisores = 72

Resposta. O número 12 600 tem 72 divisores.

Convém lembrar que o expoente do fator 7 é 1; que os divisores são 72, inclusive a unidade e o próprio número 12 600.

Observação. Na relação de *todos os divisores de um número,* devem ser incluídos, sempre, *a unidade e o próprio número.*

68. Calcular todos os divisores de um número. Vamos calcular todos os divisores do número 1 260. Já sabemos que

$1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Portanto, 1 260 tem 36 divisores, incluindo a unidade e o número 1 260.

Os divisores primos diferentes de 1 260 *são cinco:* 1, 2, 3, 5 e 7. Então vamos dividir todos os divisores de 1 260 em *quatro grupos*, a saber:

$$1.^{\circ}\ \text{grupo de divisores} \left\{\ \underline{1} \ -\ 2\ -\ 4 \right.$$

$$2.^{\circ}\ \text{grupo de divisores} \begin{cases} \underline{3} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{9} & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$3.^{\circ}\ \text{grupo de divisores} \left\{\ \underline{5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$

$$4.^{\circ}\ \text{grupo de divisores} \left\{\ \underline{7} \right.$$

O primeiro grupo é constituído *sempre*, seja qual for o número dado, pelo divisor 1, e pelas diferentes potências do primeiro divisor primo, diferente da unidade, que figura no número dado. No nosso caso ê constituído pelos divisores 1, 2 e 4. O segundo grupo é constituído pelas diferentes potências do segundo divisor primo que figura no número dado. O terceiro grupo é constituído pelas diferentes potências do terceiro divisor primo que figura no número dado. E assim por diante.

Entretanto, faltam ainda muitos divisores. O primeiro grupo está completo; os mais estão incompletos. E, para maior clareza, vamos chamar os divisores já obtidos, e que estão sublinhados, de ***divisores iniciais.***

Para completar o segundo grupo, multiplica-se cada um dos seus divisores iniciais, *por todos os divisores* do primeiro grupo. Para completar o terceiro grupo, multiplica-se cada um dos seus divisores iniciais *por todos os divisores dos dois primeiros grupos*. Para completar o quarto grupo, multiplica-se cada um dos seus divisores iniciais *por todos os divisores dos três primeiros grupos*. E assim por diante.

A disposição final é a seguinte:

$$1.^{\circ}\ \text{grupo de divisores} \left\{\ \underline{1} - 2 - 4 \right.$$

$$2.^{\circ}\ \text{grupo de divisores} \begin{cases} \underline{3} - 6 - 12 \\ \underline{9} - 18 - 36 \end{cases}$$

$$3.^{\circ}\ \text{grupo de divisores} \left\{\ \underline{5} - 10 - 20 - 15 - 30 - 60 - 45 - 90 - 180 \right.$$

$$4.^{\circ}\ \text{grupo de divisores} \begin{cases} \underline{7} - 14 - 28 - 21 - 42 - 84 - 63 - 126 - 252 \\ 35 - 70 - 140 - 105 - 210 - 420 - 315 - 630 - 1\,260 \end{cases}$$

Exemplo. Calcular todos os divisores de 210.

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \\ \\ \text{N.º dos divisores} = (1+1)\times(1+1)\times(1+1)\times(1\times1) \\ \text{N.º dos divisores} = 2\times2\times2\times2 \\ \text{N.º dos divisores} = 16. \end{array}$$

1.º grupo de divisores { 1 – 2
2.º grupo de divisores { 3 – 6
3.º grupo de divisores { 5 – 10 – 15 – 30
4.º grupo de divisores { 7 – 14 – 21 – 42 – 35 – 70 – 105 – 210

Exercícios. Série XXII

Calcular todos os divisores de cada um dos números que se seguem

1. 1 024	**3.** 5 400	**5.** 5 580
2. 864	**4.** 12 012	**6.** 6 601

69. Parte alíquota de uma grandeza. Uma grandeza pode, em geral, ser dividida em um número dado de partes iguais.

*Chama-se **parte alíquota** de uma grandeza, uma outra grandeza da mesma espécie, e que está contida um número exato de vêzes na primeira.*

Uma parte alíquota comum a duas ou mais grandezas da mesma espécie é uma outra grandeza da mesma espécie e que está contida separadamente um número exato de vêzes em cada uma delas.

Uma peça de fazenda com um certo número de metros pode ser dividida em partes iguais, de muitos modos diferentes; cada uma destas partes é uma parte alíquota da peça. Isto pôsto, consideremos duas peças de fazenda, a primeira com 42 metros e a segunda com 27 metros. Queremos dividir estas duas peças em partes iguais, e de modo que o comprimento de cada porção de fazenda seja o maior possível, *e o mesmo para as duas peças* que pretendemos repartir em partes iguais. Em outras palavras: qual será o comprimento da maior parte alíquota comum às duas peças? É o que vamos calcular, depois de aprender a pesquiza do máximo divisor comum de dois números.

70. Máximo divisor comum. O número 36 é composto; além de ser divisível por si mesmo e pela unidade, é também

divisível por 2, 3, 4, 6, 9, 12 e 18. O número 35 também é composto; além de ser divisível por si mesmo e pela unidade, é também divisível por 5 e 7. Entretanto, *os números* 35 *e* 36 *têm apenas um divisor comum, que é a unidade;* por êste motivo, são chamados ***números primos entre si,*** ou ***números primos relativos.*** (§ 50) É o que acontece com os números 8 e 15, 24 e 25, 36 e 49, etc.. Entretanto, os números 24 e 36 não são primos entre si, porque ambos são divisíveis por 2, 3, 4, 6 e 12.

Em resumo, dois números quaisquer sempre têm um ou alguns divisores comuns. Ao maior dêles dá-se o nome de máximo divisor comum. Portanto, ***máximo divisor comum de dois números é o maior número que os divide sem deixar resto.***

71. Teoremas fundamentais. ***Primeiro teorema.*** (*) *Se um número divide o dividendo e o divisor, divide também o resto.*

Dividindo-se o número 58 179 por 2 497, o quociente incompleto é 23 e o resto é 748. Portanto,

$$58\,179 = 2\,497 \times 23 + 748$$

Temos uma soma formada por duas parcelas: $2\,497 \times 23$ e 748. O número 11 divide a soma 58 179; também divide 2 497. Mas, se o número 11 divide 2 497, também divide seu múltiplo $2\,497 \times 23$. (quarto teorema de divisibilidade) Portanto, o número 11 divide uma soma formada por duas parcelas, e divide uma das parcelas. Logo, divide também a outra. (segundo teorema de divisibilidade) Com efeito, dividindo 748 por 11, verificaremos diretamente que esta divisão não deixa resto. Podendo o mesmo raciocínio ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, êste está demonstrado.

Segundo teorema. *Quando um número divide o divisor e o resto, também divide o dividendo.*

Já vimos que $58\,179 = 2\,497 \times 23 + 748$

Temos uma soma formada por duas parcelas: $2\,497 \times 23$ e 748. O número 11 divide 2 497; portanto, divide também seu

(*) Aqui temos mais alguns teoremas, cuja demonstração muito simples tem por fim preparar o estudante para vencer mais facilmente as dificuldades que o esperam na 3.ª série ginasial.

múltiplo 2 497 × 23. (quarto teorema de divisibilidade) O número 11 também divide 748. Portanto, se o número 11 divide as duas parcelas, divide a soma. (primeiro teorema de divisibilidade) Com efeito, dividindo 58 179 por 11, verificaremos diretamente que esta divisão não deixa resto. Podendo o mesmo raciocínio ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, êste está demonstrado.

Terceiro teorema. *O m. d. c. de dois números, sendo o maior divisível pelo menor, é o menor.*

Consideremos os números 72 e 24. Observemos que 72 se divide por 24, sem deixar resto. Logo, 24 é divisor comum aos números 72 e 24, porque divide a si mesmo e divide o número 72. E, evidentemente, 24 é o maior divisor comum aos números 24 e 72, porque um número maior do que 24, por exemplo, 36, pode dividir 72, mas não divide 24. Podendo o mesmo raciocínio ser feito com números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, êste está demonstrado.

Quarto teorema. *O m. d. c. de dois números, não sendo o maior divisível pelo menor, é igual ao m. d. c. do menor e do resto da divisão do maior pelo menor.*

Consideremos os números 168 e 48. Dividindo 168 por 48, o quociente incompleto é 3, e o resto é 24. Vamos provar que o m. d. c. dos números 168 e 48 é igual ao m. d. c. dos números 48 e 24. Não esqueçamos que 168 é o dividendo, 48 é o divisor e 24 é o resto. Ora, todo o número que divide 168 e 48, também divide 24 (primeiro teorema); todo o número que divide 48 e 24, também divide 168. (segundo teorema) Logo, se qualquer divisor comum aos números 168 e 48, é também divisor comum aos números 48 e 24, e recìprocamente, segue-se que êstes dois pares de números têm os mesmos divisores comuns e, por conseqüência, o mesmo m. d. c., isto é,

$$\begin{array}{r|l} 168 & 48 \\ \cline{2-2} 24 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 24 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

$$D\ (168,\ 48) = D\ (48,\ 24)\ (*)$$

Ora, o m. d. c. de 48 e 24 é 24; portanto o m.d. c. de 168 e 48 é também 24. Podendo o mesmo raciocínio ser feito com

(*) D (48, 24) significa m. d. c. de 48 e 24.

números quaisquer, desde que preencham as condições exigidas pelo teorema, êste está demonstrado.

$$\begin{array}{r|l} 804 & 192 \\ \hline 36 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 192 & 36 \\ \hline 12 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 12 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

72. Calcular o m. d. c. de dois números. Calculemos D (804, 192).

Inicialmente dividimos 804 por 192. (3.º teorema) Esta divisão deixa um resto, 36. Mas,

D (804, 192) = D (192, 36) (4.º teorema)

Então dividimos 192 por 36. (3.º teorema) Esta divisão deixa um resto, 12. Mas,

D (192, 36) = D (36, 12) (4.º teorema)

Então dividimos 36 por 12. (3.º teorema) Esta divisão sendo exata, conclue-se que

D (804, 192) = 12

73. Regra para calcular o m. d. c. de dois números. *Divide-se o maior pelo menor; divide-se o menor pelo resto; divide-se o primeiro resto pelo segundo; divide-se o segundo resto pelo terceiro, ... e assim por diante até que se chegue a um resto nulo. O m. d. c. será o último divisor.*

A êste processo para calcular o m. d. c. de dois números, dá-se o nome de ***processo das divisões sucessivas.***

Como exercício, vamos calcular o m. d. c. dos números 4 452 e 1 944.

Primeira forma

$$\begin{array}{r|l} 4\,452 & 1\,944 \\ \hline 564 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1\,944 & 564 \\ \hline 252 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 564 & 252 \\ \hline 60 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 252 & 60 \\ \hline 12 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 60 & 12 \\ \hline 0 & 5 \end{array}$$

Segunda forma

	2	3	2	4	5
4 452	1 944	564	252	60	12
564	252	60	12	0	

Resposta

D (4 452, 1 944) = 12

Na prática, a forma preferida é a segunda. É o conhecido ***algoritmo de Euclides.*** (*) A primeira linha é a linha dos quocientes; a segunda linha é a dos dividendos e divisores; a terceira é a dos restos.

(*) Chama-se *algorítmo* qualquer tipo de operação ou processo de cálculo, por exemplo, o algorítmo da adição, o da multiplicação, etc..

E agora, voltando ao exemplo do § 69, verificaremos facilmente que a maior parte alíquota comum a duas peças de fazenda que medem respectivamente 42m e 27m é uma porção de fazenda com 3m de comprimento.

Exercícios orais

Calcular o m. d. c. dos pares de números que se seguem.

1. 12 e 8	**3.** 35 e 7	**5.** 22 e 4	**7.** 48 e 32
2. 36 e 24	**4.** 28 e 21	**6.** 18 e 15	**8.** 45 e 18

Exercícios. Série XXIII

1. Calcular o m. d. c. de 15 347 e 4 532.
2. Calcular o m. d. c. de 1 565 e 626.
3. Calcular o m. d. c. de 4 789 e 137.
4. Calcular o m. d. c. de 5 544 e 6 552.
5. Calcular o m. d. c. de 80 934 e 140 343.
6. Calcular o m. d. c. de 665 038 e 2 375 019.
7. Calcular o m. d. c. de 78 540 e 37 026.
8. Um campo retangular mede 351m por 221m. É cercado com árvores plantadas à igual distância umas das outras, e a distância entre duas árvores consecutivas é a maior possível. Quantas são as árvores?
9. Um jornal distribuiu Cr$ 425,00 pelos seus pobres; outro distribuiu Cr$ 325,00 também pelos seus pobres. Os pobres de ambos os jornais receberam todos a mesma quantia, e esta foi a maior possível. Quanto recebeu cada pobre? Quantos foram os pobres socorridos por cada um dos jornais?
10. Duas avenidas vão ser arborizadas em ambos os lados. A primeira mede 407 metros de comprimento e a segunda mede 110 metros. É necessário que se plantem árvores também nas extremidades das avenidas e que, nas duas avenidas, a distância entre duas árvores consecutivas seja a mesma, e a maior possível. As árvores custam Cr$ 380,00 cada cento, e o operário ganha Cr$ 2,70 pelo plantio de cada uma. Qual será a despesa total?

74. Calcular os quocientes de dois números pelo seu m. d. c. Uma vez terminada a pesquiza do m. d. c. de dois números dados, podemos aproveitar a operação feita para verificar quantas vêzes cada um dos dois números dados contém o m. d. c. Retomemos o exemplo do § 73.

	2	3	2	4	5
4 452	1 944	564	252	60	12
564	252	60	12	0	
371	162	47	21	5	1

Para maior clareza vamos chamar os números da quarta linha de ***quocientes suplementares.*** Por baixo de 12 escreveremos 1, porque $12 \div 12 = 1$. Por baixo de 60 escreveremos 5, porque $60 \div 12 = 5$. Portanto, o primeiro quociente suplementar é 1 e o segundo é 5. Para obter o terceiro quociente suplementar, multiplica-se o segundo quociente suplementar, 5, pelo quociente correspondente da primeira linha, 4, e soma-se o produto com o primeiro quociente suplementar; o resultado, 21, é o terceiro quociente suplementar. Com efeito, $252 \div 12 = 21$. Para obter o quarto quociente suplementar, multiplica-se o terceiro quociente suplementar, 21, pelo quociente correspondente da primeira linha, 2, e soma-se o produto com o segundo quociente suplementar; o resultado, 47, é o quarto quociente suplementar. Com efeito, $564 \div 12 = 47$. E assim por diante.

Exercícios. Série XXIV

1. Calcular o m. d. c. dos números 10 863 e 2 059. Em seguida, calcular os quocientes das divisões dêstes mesmos números, pelo seu m. d. c. com o auxílio dos quocientes suplementares.

	5	3	1	1	1	2
10 863	2 059	568	355	213	142	71
568	355	213	142	71	0	
153	29	8	5	3	2	1

Resposta. Os dois quocientes pedidos são 153 e 29.

2. Mesmo exercício com os números 5 544 e 6 552.

3. Mesmo exercício com os números 80 934 e 140 343.

4. Mesmo exercício com os números 78 540 e 37 026.

5. O m. d. c. de dois números é 103. Os quocientes das divisões sucessivas são 3, 2, 1, 1, 2 e 3. Calcular os dois números.

	3	2	1	1	2	3
						103
149	44	17	10	7	3	1

$149 \times 103 = 15\,347$ $\quad 44 \times 103 = 4\,532$

Resposta. Os dois números pedidos são 15 347 e 4 532.

6. O m. d. c de dois números é 207. Os quocientes das divisões sucessivas são 5, 2, 4, 1 e 3. Calcular os dois números.

7. O m. d. c. de dois números é 303. Os quocientes das divisões sucessivas são 4, 2, 6, 5, 3 e 7. Calcular os dois números.

8. Fazer o quinto exercício, sem recorrer aos quocientes suplementares.

9. Idem, em relação ao 6.º exercício.

10. Idem, em relação ao 7.º exercício.

75. Propriedades do m. d. c. Voltemos ao exemplo do § 73 e consideremos a ***primeira forma.*** Se o número 4 divide 4 452 e 1944, também divide 564. (primeiro teorema) Mas, se o número 4 divide 1 944 e 564, também divide 252. (primeiro teorema) Mas, se o número 4 divide 564 e 252, também divide 60. (primeiro teorema) Mas, se o número 4 divide 252 e 60, ***também divide*** 12. Concluímos então que, ***quando um número divide outros dois números, também divide o m. d. c. dêstes dois números.*** Esta conclusão será muito útil mais adiante.

Se o m. d. c. dos números 4 452 e 1 944 é 12, os números 4 452 e 1 944 são múltiplos de 12. Então, de acôrdo com o quarto teorema geral de divisibilidade, concluímos que, ***quando um número divide o m. d. c. de dois números, divide também êstes dois números.***

De acôrdo com a primeira conclusão podemos desde já afirmar que os divisores comuns aos números 4 452 e 1 944 são ùnicamente os divisores de 12, a saber, 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Já vimos que, *multiplicando-se ou dividindo-se o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera, mas o resto fica multiplicado ou dividido por êste mesmo número.* (§ 37)

Voltando novamente ao exemplo do § 73, ***primeira forma,*** podemos então afirmar que, se dividirmos 4 452 e 1 944 por 4, o quociente da primeira divisão não se altera, mas o resto fica dividido por 4. Estando 1 944 e 564 divididos por 4, o quociente da segunda divisão não se altera, mas o resto fica dividido por 4. Prosseguindo com êste raciocínio concluímos que, ***quando se multiplicam ou se dividem dois números por um terceiro, o m. d. c. dos dois números fica multiplicado ou dividido por êste terceiro.***

Exercícios. Série XXV

1. Quais são os divisores comuns aos números 120 e 324?
2. Quais são os divisores comuns aos números 110 e 407?
3. Quais são os divisores comuns aos números 555 e 150?
4. Quais são os divisores comuns aos números 285 e 202?
5. Quais são os divisores comuns aos números 2 184 e 456?

76. Simplificação do processo das divisões sucessivas. Vamos calcular o m. d. c. dos números 70 500 e 25 500. Dividamos os dois números por 100 e procuremos o m. d. c. dos quocientes 705 e 255.

	2	1	3	4
705	255	195	60	15
195	60	15	0	

Mas, em virtude da terceira conclusão a que chegámos no parágrafo anterior, o m. d. c. está dividido por 100. Logo, o m. d. c. dos números 70 500 e 25 500 é 15 × 100, isto é, 1 500.

Exemplo. Calcular o m. d. c. dos números 73 600 e 2 400.

73 600 ÷ 100 = 736

2 400 ÷ 100 = 24

	30	1	2
736	24	16	8
16	8	0	

Resposta. D(73 600, 2 400) = 8 × 100 = 800

77. Dividindo-se dois números pelo seu m. d. c. os quocientes são primos entre si. O m. d. c. dos números 4 452 e 1 944 é 12 e, se dividirmos 4 452 e 1 944 por 12, os quocientes serão, respectivamente, 371 e 162. Mas, se os números 4 452 e 1 944 são divididos por 12, o m. d. c. dêles, isto é, 12, também fica dividido por 12. (§ 75) Logo, o m.d.c. dos quocientes, isto é, de 271 e 162 é 1. Então, êstes dois números são primos entre si. É o que podemos verificar, também, diretamente.

	2	3	2	4	5
371	162	47	21	5	1
47	21	5	1	0	

D (371, 162) = 1

78. M. d. c. de três números. Para calcular o m. d. c. de três números, calcula-se o m. d. c. de dois quaisquer dos números dados; depois calcula-se o m. d. c. do resultado e do terceiro número. Êste segundo m. d. c. é o m. d. c. dos três números dados.

Exemplo. Calcular o m. d. c. dos números 729, 2 538 e 8 316.

	3	3	1	1	1	1	2
8 316	2 538	702	432	270	162	108	54
702	432	270	162	108	54	00	

	13	2
729	54	27
189 27	0	

D (8 316, 2 538) = 54

D (729, 54) = 27

D (729, 2 538, 8 316) = 27

Na prática convém iniciar as operações com os dois números menores.

Exercícios. Série XXVI

1. Calcular o m. d. c. de 1 958, 6 578 e 49 346.
2. Calcular o m. d. c. de 675, 4 320 e 50 715.
3. Calcular o m. d. c. de 1 624, 2 380 e 11 312.

79. Composição do m. d. c. de dois ou mais números. Aprendemos a calcular o m. d. c. de dois ou mais números, pelo *processo das divisões sucessivas*. Vamos agora aprender outro processo para calcular o ***m. d. c. de dois ou mais números dados, pela decomposição dêsses números em seus fatôres primos.*** Êste processo se resume na seguinte

Regra. *Para calcular o m. d. c. de dois ou mais números, pela decomposição dêstes números em seus fatôres primos, decompõe-se cada um dos números dados em seus fatôres primos. Em seguida, multiplicam-se os fatôres primos* ***comuns*** *aos números dados, tomando cada um dêles com o seu* ***menor*** *expoente. O produto será o m. d. c. dos números dados.*

Exemplo. Calcular pela decomposição em fatôres primos, o m. d. c. dos números 210, 1 980 e 14 040.

$$\begin{array}{r|l} 14\,040 & 2 \\ 7\,020 & 2 \\ 3\,510 & 2 \\ 1\,755 & 3 \\ 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1\,980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$210 = 2\times3\times5\times7$$
$$1\,980 = 2^2\times3^2\times5\times11$$
$$14\,040 = 2^3\times3^3\times5\times13$$

$$D\,(210,\ 1\,980,\ 14\,040) = 2\times3\times5 = 30$$

Demonstração. Diz o quinto teorema de divisibilidade que: *quando um número é divisível por outro, é também divisível pelos fatôres dêste outro.* O m. d. c. dos três números dados é $2\times3\times5$. Ora, o m. d. c. não pode ser $2\times3\times5\times2$, porque 210, se fosse divisível por $2\times3\times5\times2$, seria também divisível por 2×2, o que não é possível, porque 210 não contém o fator 2×2. O m. d. c. não pode ser $2\times3\times5\times7$, porque os números 1 980 e 14 040, se fossem divisíveis por $2\times3\times5\times7$, seriam também divisíveis por 7, o que não é possível, porque 1 980 e 14 040 não contêm o fator 7. Logo, se o produto $2\times3\times5$, sendo mul-

tiplicado por qualquer outro número, deixa de ser divisor comum aos três números dados, êle é, realmente, o m. d. c. dos três números dados.

Exercícios. Série XXVII

Calcular, pela decomposição em fatôres primos, o m. d. c. dos grupos de números que se seguem.

1. 840 e 880	**4.** 5 544 e 6 552	**7.** 78 540 e 37 026
2. 1 565 e 626	**5.** 80 934 e 140 343	**8.** 420, 990 e 1 950
3. 10 863 e 2 059	**6.** 665 038 e 2 375 019	**9.** 770, 1 078 e 2 002

80. Mínimo múltiplo comum. *Múltiplo comum de dois ou mais números é um número que é divisível exatamente por êsses dois ou mais números.* 15 é múltiplo comum de 3 e 5; 24 é múltiplo comum de 2, 3, 4, 6, 8 e 12; 30 é múltiplo comum de 2, 3, 5, 6, 10 e 15; e assim por diante.

Dois ou mais números têm sempre uma infinidade de múltiplos comuns. Consideremos os números 3 e 4; seu produto 3×4 ou 12, é divisível por 3 e por 4. Agora, se multiplicarmos 12 pela sucessão dos números naturais, isto é, por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, etc., os produtos obtidos, a saber, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, etc., sendo divisíveis por 12, serão divisíveis por 3 e 4, porque, quando um número é divisível por outro, é também divisível pelos fatôres dêste outro. (quinto teorema de divisibilidade) Portanto, não é possível determinar *o maior múltiplo comum* de dois ou mais números.

O que nos interessa nesta lição é o menor de todos os múltiplos comuns de dois ou mais números dados; é o ***mínimo múltiplo comum*** ou, abreviadamente, ***m. m. c.*** ou ***M.***

Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número que é divisível por êstes dois ou mais números.

Regra. *Para calcular o m. m. c. de dois ou mais números, decompõe-se cada um dêstes números em seus fatôres primos. Em seguida, multiplicam-se os fatôres primos* ***comuns*** *e não* ***comuns*** *aos números dados, tomando cada um dêles com o seu* ***maior*** *expoente. O produto será o m. m. c. dos números dados.*

Exemplo. Calcular o m. m. c. dos números 210, 660, 690 e 1 800.

210	2	660	2	690	2	1 800	2
105	3	330	2	345	3	900	2
35	5	165	3	115	5	450	2
7	7	55	5	23	23	225	3
1		11	11	1		75	3
		1				25	5
						5	5
						1	

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$690 = 2 \times 3 \times 5 \times 23$$
$$1\,800 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$
$$M\ (210,\ 660,\ 690,\ 1\,800) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 23$$
$$M\ (210,\ 660,\ 690,\ 1\,800) = 3\,187\,800$$

Demonstração. Diz o quinto teorema de divisibilidade que: *quando um número é divisível por outro, é também divisível pelos fatôres dêste outro.* Obtivemos para m. m. c. dos quatro números dados, o número $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 23$. Êste produto é realmente o m. m. c. dos números dados. Para prová-lo, vamos suprimir neste produto, um fator qualquer, por exemplo, o fator 7. O m. m. c. dos quatro números dados será então $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times$ $\times 11 \times 23$. Ora, êste número, sendo divisível por 210, deverá ser também divisível pelos fatôres de 210, por exemplo, por 7, o que não é possível porque êle, $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 23$, não contém o fator 7. Logo, suprimindo o fator 7, o número $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \times$ $\times 23$ deixa de ser múltiplo comum dos quatro números dados. Se, devido à supressão de um qualquer de seus fatôres, o número $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 23$ deixa de ser múltiplo comum dos quatro números dados, êle é realmente o m. m. c. dêstes mesmos números.

Na prática a decomposição dos números dados em fatôres primos pode ser simultânea.

Exemplo. Calcular o m. m. c. de 210, 660, 690 e 1 800.

210,	660,	690,	1 800	2
105,	330,	345,	900	2
105,	165,	345,	450	2
105,	165,	345,	225	3
35,	55,	115,	75	3
35,	55,	115,	25	5
7,	11,	23,	5	5
7,	11,	23,	1	7
1,	11,	23,	1	11
1,	1,	23,	1	23
1,	1,	1,	1	

$$M\ (210,\ 660,\ 690,\ 1\,800) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 23$$
$$M\ (210,\ 660,\ 690,\ 1\,800) = 3\,187\,800$$

Para maior clareza, chamaremos ao primeiro processo de *pesquiza do m. m. c. pela decomposição isolada em fatôres primos* e ao segundo de *pesquiza do m. m. c.* pela *decomposição simultânea em fatôres primos.*

81. Observações sôbre o m. m. c. de dois ou mais números. Três ou mais números são chamados ***primos entre si dois a dois*** quando, considerados ***dois a dois,*** têm como divisor comum sòmente a unidade. É o caso dos números 8, 9, 35 e 143. Nenhum dêles é primo. Entretanto, tomemos dois quaisquer dêstes números e verificaremos que são primos entre si.

Três ou mais números são chamados ***primos entre si em conjunto*** quando, considerados ***em conjunto,*** têm como divisor comum sòmente a unidade. É o caso dos números 8, 9, 18 e 33. Nenhum dêles é primo, Entretanto. *existe,* apenas, *um número que divide êstes quatro números; é a unidade. Êles são primos entre si em conjunto.* Mas, *não são primos entre si dois a dois;* 8 e 18 são divisíveis por 2; 18 e 33 são divisíveis por 3, etc..

Primeia observação. Quando dois números são primos entre si, ou quando três ou mais números são primos entre si, dois a dois, o m. m. c. dêles é o seu produto. O m. m. c. de 8 e 9 é 72; de 4, 9 e 11 é 396; de 4, 7, 9 e 25 é 6 300. É o que podemos verificar diretamente, calculando pelos dois processos indicados o m. m. c. dêstes números.

Exemplo. Calcular o m. m. c. dos números 36, 143 e 175.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 143 = 11 \times 13 \\ 175 = 5^2 \times 7 \end{array}$$

Ora, aplicando a regra (§ 80), o m. m. c. dos números 36, 143 e 175 é $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$ ou $4 \times 9 \times 25 \times 7 \times 11 \times 13$ ou $36 \times 175 \times 143$, isto é, exatamente o produto dos números 36, 143 e 175.

Segunda observação. O m. m. c. de dois ou mais números tais que o maior é divisível por todos os outros, é o maior dos números dados. Sejam os números 3, 4, 6, 8, 12 e 48, dos quais se pede o m. m. c. Sendo 48 divisível por si mesmo, e pelos nú-

meros 3, 4, 6, 8 e 12, é um múltiplo comum de todos os números dados. E é o menor porque um número menor que 48 pode ser divisível por 3, 4, 6, 8 ou 12, mas não é divisível por 48.

Terceira observação. Decompondo os números 60 e 126 em seus fatôres primos, para calcular-lhes o m. d. c. e o m. m. c., acharemos $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ e $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Êstes resultados podem ser dispostos como se vê na figura ao lado.

$$60 = \boxed{2 \times 3} \times \boxed{2 \times 5}$$

$$126 = \boxed{2 \times 3} \times \boxed{3 \times 7}$$

Observando-a com atenção, verificaremos que: os fatôres do primeiro retângulo superior à esquerda constituem o m. d. c. de 60 e 126; os fatôres dos outros três retângulos constituem o m. m. c. de 60 e 126. E concluiremos que $D(60, 126) \times M(60, 126) = 60 \times 126$. Repetindo a operação com outros dois números quaisquer, chegaremos sempre à mesma conclusão. Fica então demonstrado que:

O produto de dois números é igual ao produto do m. d. c. pelo m. m. c. dêstes mesmos números.

Exercícios. Série XXVIII

1. Calcular o m. m. c. de 36, 80, 77 e 91.
2. Calcular o m. m. c. de 65, 85, 39 e 44.
3. Calcular o m. m. c. de 68, 429, 770 e 390.
4. Calcular o m. m. c. de 12 012, 63 954 e 8 664.
5. Calcular o m. m. c. de 78 540 e 37 026.
6. Calcular o m. m. c. de 19 074, 17 680 e 14 535.
7. Calcular o m. m. c. de 48 279, 20 349 e 17 017.
8. Calcular o m. m. c. de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 15, 42, 165 e 385.
9. Qual é o menor número divisível por 24, 60 e 105?
10. Quais são os dois menores números divisíveis por 12, 35 e 54?
11. Quais são os cinco menores múltiplos comuns aos números 8, 12, 25 e 40?
12. Calcular os três menores números que, multiplicados respectivamente por 216, 400 e 720, dão produtos iguais.
13. Qual é o menor número que, dividido por 5 775, 1 911 e 24 255, deixa um resto igual a 103?
14. Quais são os quatro menores números que, multiplicados respectivamente por 10, 11, 12 e 15 dão produtos iguais?
15. Qual é o menor número que, dividido por 120, 140, 160 e 180, deixa um resto igual a 25?
16. Quais são os quatro menores números que, multiplicados respectivamente por 15, 20, 25 e 30, dão produtos iguais?

17. Qual o m. m. c. de dois números cujo produto é 6 480, sendo D = 36?

18. Qual é o m. d. c. de dois números cujo produto é 23 040, sendo M = 240?

19. O m. d. c. de dois números é 3 e o m. m. c. é 1 260. Se um dos números é 36, qual é o outro?

20. Quais são os números de dois algarismos, divisíveis por 3 e por 4?

21. Quais são os números de três algarismos, divisíveis por 5, 6 e 12?

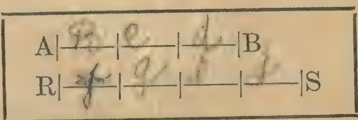
22. Da Praça da República partem, às 6 horas da manhã, dois bondes das linhas X e Y, iniciando o serviço do transporte de passageiros. Sabendo-se que o bonde X volta ao ponto de partida ao cabo de 50 minutos, e o Y, ao cabo de 45 minutos, pergunta-se a que horas os dois bondes partirão novamente juntos da Praça da República.

23. Tenho três réguas divididas em partes iguais. Cada parte da primeira tem 3mm, da segunda, 5mm, e da terceira, 12mm. Coloco as três réguas uma ao lado da outra, de modo que as suas extremidades coincidam. Quais são os traços de divisão das três réguas, que coincidem?

CAPÍTULO III

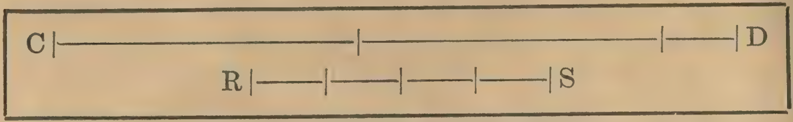
Números Fracionários

82. Definição. *Número natural é o número que exprime a medida de uma grandeza que contém a unidade, exatamente, uma ou mais vêzes.* Pode acontecer, porém, que a grandeza que se quer medir não contenha a unidade, exatamente, uma ou algumas vêzes; neste caso, para exprimir a medida desta grandeza, temos de recorrer a uma nova espécie de números, ***os números fracionários,*** que virão ampliar consideravelmente o nosso ***campo numérico.*** (§ 4)



Consideremos uma grandeza qualquer, por exemplo, o segmento retilíneo AB, e seja RS o segmento tomado como unidade para medir o segmento AB. Desde logo notamos que a grandeza AB é menor que a unidade RS. Logo, *não há um número natural que represente a medida do segmento* AB, tomando como unidade o segmento RS. Esta dificuldade, porém, é fácil de remover. Dividimos a unidade RS em um certo número de partes iguais por exemplo, *em quatro.* Daremos a cada uma destas partes, o nome de *um quarto.* Depois, verificamos com um compasso de pontas sêcas, que *um quarto da unidade* RS *está contido três vêzes no segmento* AB; neste caso, diremos que ***a medida do segmento*** AB ***é três vêzes a quarta parte da unidade*** RS. E, abreviadamente, escreveremos : $\frac{3}{4}$.

Consideremos agora o segmento CD, que queremos medir com a mesma unidade, RS, do exemplo anterior. Com um compasso de pontas sêcas verificamos que RS cabe *mais duas de vêzes e menos de três vêzes no segmento CD;* portanto, *não há um número natural que seja a medida do segmento CD,* tomando como unidade o segmento RS. Neste caso, dividimos a unidade RS em um certo número de partes iguais, por exemplo, *em quatro.*



Já sabemos que cada uma destas partes é chamada *um quarto.* Depois, com o compasso de pontas sêcas, verificamos que *um quarto da unidade* RS *está contido nove vêzes no segmento* CD; neste caso, diremos que ***a medida do segmento*** AB ***é nove vêzes a quarta parte da unidade*** RS. E, abreviadamente, escreveremos: $\frac{9}{4}$.

Êstes símbolos, $\frac{3}{4}$ ou $\frac{9}{4}$, são chamados ***números fracionários*** ou, simplesmente, ***frações.***

O número 4, escrito por baixo do traço horizontal, é chamado ***denominador.*** Com efeito, êle indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida; como se *denomina* cada uma destas partes.

O número 3 ou o número 9, escrito sôbre o mesmo traço horizontal, é chamado ***numerador.*** Com efeito, êle indica o ***número*** de vêzes que uma das partes em que se dividiu a unidade RS, coube exatamente na grandeza AB, ou na grandeza CD.

E os dois números que constituem a fração são chamados ***têrmos da fração.***

A cada uma das partes iguais em que se divide a unidade, dá-se o nome de ***unidade fracionária,*** para não confundí-la com a *unidade fundamental* ou simplesmente, *unidade.* Cada uma das partes iguais em que se divide a unidade é também chamada *parte alíquota* da unidade. No primeiro exemplo, o segmento AB contém 3 partes alíquotas do segmento RS; no segundo, o segmento CD contém 9 partes alíquotas do segmento RS.

Fração é o número que designa uma ou algumas partes de uma unidade dividida em um número qualquer de partes iguais.

As frações que acabámos de definir são chamadas ***frações ordinárias.***

Ilustração. Se um menino deseja comer $\frac{3}{4}$ de uma maçã, deve dividí-la em *quatro partes* ***iguais*** e comer *três* destas partes.

E se quiser comer $\frac{11}{4}$? À primeira vista, isto parece um absurdo, visto que uma maçã tem sòmente *quatro quartos*. Entretanto, êste absurdo desaparece, se considerarmos que o menino pode tomar *três* maçãs, dividir cada uma delas em *quatro partes* ***iguais***, isto é, em *quartos*, e comer 11 pedaços, 11 quartos.

83. Leitura de uma fração ordinária. Para ler uma fração ordinária, lê-se primeiramente o numerador e, depois, o denominador. O numerador é lido como um número natural. Para ler o denominador dir-se-á *meios, terços, quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos e nonos*, em lugar de *dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito* e *nove;* dir-se-á *décimos, centésimos, milésimos*, etc., em lugar de *dez, cem, mil*, etc.; juntar-se-lhe-á a palavra *avos*, em qualquer outro caso.

Exemplos: $\frac{5}{8}$ (cinco oitavos); $\frac{3}{7}$ (três sétimos); $\frac{7}{10}$ (sete décimos); $\frac{13}{100}$ (treze centésimos); $\frac{11}{24}$ (onze vinte e quatro avos).

Exercícios orais

1. O que significa $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{25}$?

2. Três meninos repartiram entre si um bôlo. O primeiro comeu $\frac{4}{15}$ do bôlo, o segundo comeu $\frac{5}{15}$ e o terceiro comeu o resto. Quanto comeu o terceiro?

3. Quem comeu $\frac{11}{16}$ de uma laranja, comeu a laranja inteira? Sobrou alguma coisa? Quanto?

4. Com o auxílio de duas tiras de papel com o mesmo comprimento, comparar as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{8}$ e dizer qual é a maior das duas.

5. Que fração do dia são 11 horas?
6. » » da semana são 3 dias?
7. » » do mês são 13 dias?
8. » » » ano são 5 mêses?
9. » » » cruzeiro são 20 centavos?
10. » » » » » 40 centavos?

84. Frações próprias, impróprias e aparentes. *Fração própria* é a fração menor que a unidade. Na prática se reco-

nhece facilmente pelo fato de ter o numerador menor que o denominador. *Exemplos:* $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$, etc..

Fração imprópria é a fração maior que a unidade. Na prática se reconhece facilmente pelo fato de ter o numerador maior que o denominador. *Exemplos:* $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{23}{12}$, etc..

Fração aparente é aquela cujo numerador é múltiplo do denominador. As frações $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{16}{4}$, etc., são frações aparentes.

Número mixto é o número constituído por um número inteiro e uma fração própria. *Exemplos:* $3\frac{2}{5}$, $4\frac{5}{6}$, $8\frac{4}{9}$, $10\frac{7}{12}$, etc..

Considerando que a unidade tem *dois meios, três terços, quatro quartos,* etc., conclui-se que pode ser representada, por meio das frações ordinárias, de uma infinidade de maneiras:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{7}{7} = \frac{8}{8} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Estas frações são tôdas aparentes porque cada uma delas é igual à unidade.

Exercícios orais

1. Dizer frações iguais a 2 unidades.
2. Dizer frações iguais a 3 unidades.
3. Dizer frações iguais a 4 unidades.
4. Dizer frações iguais à metade da unidade.
5. Dizer frações iguais à têrça parte da unidade.
6. Dizer frações iguais a dois terços da unidade.

85. Transformação de uma fração imprópria em número inteiro ou mixto. Consideremos a fração imprópria $\frac{38}{7}$. Uma unidade tem 7 sétimos. Ora, quantas vêzes 7 sétimos estão contidos em 38 sétimos? A resposta a esta pergunta é o número de unidades que a fração $\frac{38}{7}$ contém. Mas, para responder a esta pergunta, é necessário dividir 38 sétimos por 7 sétimos.

38 sétimos	7 sétimos
3 sétimos	5 unidades

Portanto, 38 sétimos contêm 5 unidades e restam ainda 3 sétimos isto é, $\frac{38}{7} = 5\frac{3}{7}$.

Podendo o mesmo raciocínio ser feito com qualquer outra fração imprópria ou aparente, podemos estabelecer a seguinte

Regra. *Para transformar uma fração imprópria ou aparente em número inteiro ou mixto, divide-se o numerador pelo denominador. Se houver resto, completa-se o quociente com uma fração tendo para numerador o resto da divisão e para denominador o divisor.*

Primeiro exemplo. Converter $\frac{143}{11}$ em número inteiro ou mixto.

$$\begin{array}{r|l} 143 & 11 \\ \hline 33 & 13 \\ 0 & \end{array}$$

Resposta. $\frac{143}{11} = 13$

Segundo exemplo. Converter $\frac{147}{11}$ em número inteiro ou mixto.

$$\begin{array}{r|l} 147 & 11 \\ \hline 37 & 13 \\ 4 & \end{array}$$

Resposta. $\frac{147}{11} = 13\frac{4}{11}$

86. Transformação de um número inteiro em fração com denominador dado; transformação de um número mixto em fração imprópria. Podemos dar a um número inteiro qualquer a forma de uma fração; mas esta fração será naturalmente uma fração aparente. (§ 84) Como exemplo, vamos transformar o número 5 em uma fração cujo denominador seja 8, isto é, vamos reduzir 5 a oitavos. Ora, se uma unidade tem 8 oitavos, 5 unidades têm 5 vêzes oito oitavos, isto é, 40 oitavos. Portanto, $5 = \frac{40}{8}$.

Regra. *Para dar a um número inteiro a forma de fração com denominador dado, toma-se como numerador o produto do inteiro pelo denominador.*

Exemplo. Reduzir 7 a uma fração com o denominador 12.

$$7 = \frac{7 \times 12}{12} \qquad 7 = \frac{84}{12} \qquad \textit{Resposta.}\ 7 = \frac{84}{12}$$

No cálculo das frações ordinárias, teremos, muitas vêzes, de dar a um número inteiro a forma de fração com denominador qualquer. O mais simples, então, é tomar a unidade para denominador. Por exemplo:

$$5 = \frac{5}{1} \qquad 7 = \frac{7}{1} \qquad 12 = \frac{12}{1}$$

Para ler estas frações diremos apenas 5, 7, 12.

Consideremos agora o número mixto $5\frac{3}{8}$. Êste número se compõe de duas partes: cinco unidades e três oitávos. Ora,

cinco unidades são quarenta oitavos. Portanto 5 unidades mais 3 oitavos é o mesmo que 40 oitavos mais 3 oitavos, isto é, 43 oitavos. Então, podemos concluir que:

Regra. *Para transformar um número mixto em frção imprópria, multiplica-se a parte inteira pelo denominador, soma-se o produto com o numerador, e ter-se-á o numerador da fração imprópria; o denominador da fração imprópria será o mesmo denominador que figura no número mixto dado.*

$7\frac{3}{4}$ *Exemplo.* Transformar o número mixto em fração imprópria.

Resposta. $7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$

$$7\frac{3}{4} = \frac{7 \times 4 + 3}{4}$$

$$7\frac{3}{4} = \frac{31}{4}$$

Exercícios orais

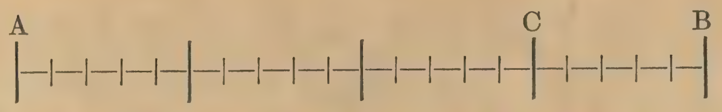
1. $\frac{23}{4} = ?$	6. $7 = \frac{?}{4}$	11. $15 = \frac{?}{1}$	16. $4\frac{2}{5} = ?$
2. $\frac{37}{8} = ?$	7. $6 = \frac{?}{5}$	12. $7 = \frac{?}{6}$	17. $3\frac{7}{8} = ?$
3. $\frac{41}{9} = ?$	8. $3 = \frac{?}{7}$	13. $23 = \frac{?}{1}$	18. $9\frac{3}{4} = ?$
4. $\frac{23}{5} = ?$	9. $6 = \frac{?}{9}$	14. $11 = \frac{?}{6}$	19. $8\frac{3}{7} = ?$
5. $\frac{27}{8} = ?$	10. $6 = \frac{?}{10}$	15. $8 = \frac{?}{5}$	20. $11\frac{2}{5} = ?$

87. Simplificação das frações ordinárias. *Simplificar uma fração ordinária é transformá-la em outra fração eqüivalente, isto é, com o mesmo valor, e cujos numerador e denominador sejam menores, respectivamente, que o numerador e o denominador da fração dada.*

Esta transformação é, em geral, possível, de acôrdo com o seguinte

Teorema. *Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os têrmos de uma fração por um mesmo número, o valor da fração não se altera.*

Seja a fração $\frac{3}{4}$. Multiplicando-se ambos os têrmos desta fração por 5, resulta $\frac{15}{20}$. Vamos mostrar que $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.



Consideremos uma unidade qualquer, o segmento AB, e dividamo-lo em quatro partes iguais. Cada uma destas partes chamar-se-á *um quarto*, e a porção de segmento compreendida entre os pontos A e C representará *três quartos* do segmento AB.

Agora dividamos *cada quarto* em *cinco partes iguais*. Então o segmento AB ficará dividido em *vinte partes iguais*, cada uma das quais chamar-se-á *um vinte avos*. E a porção de segmento compreendida entre os pontos A e C representará *quinze vinte avos* do segmento AB. Ora, se o segmento AC representa indiferentemente a fração $\frac{3}{4}$ ou a fração $\frac{15}{20}$, conclui-se que estas duas frações são iguais.

Seja qual for a fração dada e o número pelo qual se multiplicam seus têrmos, se repetirmos esta verificação chegaremos sempre à mesma conclusão. Então a primeira parte do teroema está demonstrada.

Ora, se $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, segue-se que $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. (propriedade simétrica das igualdades, § 27) Logo, podemos também dividir ambos os têrmos de uma fração, por um mesmo número, sem que seu valor se altere.

Consideremos a fração $\frac{144}{156}$. De acôrdo com o teorema dado podemos dividir seus têrmos por 12. Resulta a fração $\frac{12}{13}$ que é eqüivalente à fração $\frac{144}{156}$, porque ambas têm o mesmo valor.

Às vêzes, porém, não é possível simplificar uma fração, como acontece por exemplo com a fração $\frac{35}{48}$. A simplificação não é possível porque os dois têrmos da fração não têm um divisor comum, diferente da unidade; são primos entre si. Neste caso, dá-se à fração o nome de *fração irredutível*.

Para simplificar uma fração há dois processos distintos: o das divisões sucessivas e o do m. d. c.

88. Simplificação de uma fração pelo processo das divisões sucessivas. ***Regra.*** *Para simplificar uma fração pelo*

processo das divisões sucessivas, dividem-se os dois têrmos da fração dada por um dos seus divisores comuns; dividem-se os dois têrmos da fração resultante por um dos seus divisores comuns; e assim sucessivamente até que os dois têrmos da fração se tornem primos entre si.

Exemplo. Simplificar a fração $\frac{840}{1\,320}$.

$$\frac{840}{1\,320} = \frac{840 \div 10}{1\,320 \div 10} = \frac{84}{132} = \frac{84 \div 6}{132 \div 6} = \frac{14}{22} = \frac{14 \div 2}{22 \div 2} = \frac{7}{11}$$

Resposta. $\frac{840}{1\,320} = \frac{7}{11}$

Os dois têrmos da fração $\frac{7}{11}$, sendo primos entre si, esta fração é irredutível.

E dizemos, então, que $\frac{7}{11}$ é a forma mais simples da fração $\frac{840}{1\,320}$, ou que *a fração* $\frac{840}{1\,320}$ *está reduzida à sua expressão mais simples.*

Exercícios orais

Simplificar as frações que se seguem.

1. $\frac{12}{15}$	3. $\frac{25}{40}$	5. $\frac{17}{51}$	7. $\frac{19}{57}$	9. $\frac{26}{39}$
2. $\frac{14}{21}$	4. $\frac{13}{26}$	6. $\frac{30}{45}$	8. $\frac{24}{60}$	10. $\frac{33}{44}$

89. Simplificação de uma fração pelo processo do m. d. c. ***Regra.*** *Para simplificar uma fração pelo processo do m. d. c., calcula-se o m. d. c. dos dois têrmos da fração e dividem-se ambos os têrmos da fração pelo seu m. d. c.*

Neste caso, a fração resultante é irredutível (§ 87), e a pesquiza do m. d. c. pode ser aproveitada para obter os dois têrmos desta mesma fração.

Exemplo. Simplificár a fração $\frac{5\,530}{7\,667}$.

	1	2	3	1	1	3	2
7 667	5 330	2 337	656	369	287	82	41
2 337	656	369	287	82	41	0	
187	130	57	16	9	7	2	1

$$\frac{5\,330}{7\,667} = \frac{5\,330 \div 41}{7\,667 \div 41} = \frac{130}{187}$$

Resposta. $\frac{5\,330}{7\,667} = \frac{130}{187}$

É preferível o primeiro processo, quando se quer simplificar uma fração de têrmos pequenos, cujos divisores comuns são facilmente reconhecíveis pelos caracteres de divisibilidade.

É preferível o segundo processo, quando se quer simplificar uma fração de têrmos grandes, cujos divisores comuns não são facilmente reconhecíveis pelos caracteres de divisibilidade.

E, às vêzes, há conveniência em empregar os dois processos.

Exemplo. Simplificar a fração $\frac{84\,210}{276\,690}$.

$$\frac{84\,210}{276\,690} = \frac{84\,210 \div 10}{276\,690 \div 10} = \frac{8\,421}{27\,669} = \frac{8\,421 \div 3}{27\,669 \div 3} = \frac{2\,807}{9\,223}$$

	3	3	2
9 223	2 807	802	401
802	401	00	
23	7	2	1

$$\frac{2\,807}{9\,223} = \frac{2\,807 \div 401}{9\,223 \div 401} = \frac{7}{23} \qquad \textit{Resposta.} \quad \frac{84\,210}{276\,690} = \frac{7}{23}$$

Neste exemplo empregámos no comêço o primeiro processo para simplificar a fração dada. Resultou a fração $\frac{2\,807}{9\,323}$. Ora, se recorrermos aos caracteres de divisibilidade de que geralmente nos servimos na prática, não acharemos um divisor comum aos têrmos da fração $\frac{2\,807}{9\,223}$. Entretanto, não podemos afirmar que seja irredutível. Recorremos então ao segundo processo e terminamos a simplificação.

Exercícios. Série XXIX

1. Simplificar a fração $\frac{1\,537}{3\,422}$.
2. Simplificar a fração $\frac{4\,715}{7\,567}$.
3. Simplificar a fração $\frac{6\,710}{9\,333}$.
4. Simplificar a fração $\frac{1\,729}{1\,771}$.
5. Simplificar a fração $\frac{1\,099}{8\,635}$.
6. Simplificar a fração $\frac{2\,293}{3\,271}$.
7. Descobrir uma fração igual a $\frac{5}{8}$, cujo denominador seja 584.
8. Calcular uma fração igual a $\frac{7}{16}$, cujo numerador seja 371.

9. Calcular uma fração igual a $\frac{4}{9}$, cujo denominador seja 41. É possível? Por que?

10. Qual é a fração igual a $\frac{21}{28}$, e cujo denominador é 52?

11. Qual é a fração igual a $\frac{30}{36}$, e cujo numerador é 65?

12. Qual é a fração igual a $\frac{44}{52}$, e cujo denominador é 130?

13. Qual é a fração igual a $\frac{567}{648}$, e cujo denominador é 136?

14. Qual é a fração igual a $\frac{630}{780}$, e cujo numerador é 147?

90. Redução de frações ao mesmo denominador. *Frações homogêneas* são as frações que têm o mesmo denominador: $\frac{8}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{15}$, etc..

Frações não homogêneas são as frações que não têm o mesmo denominador: $\frac{4}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{15}$, etc..

Reduzir frações ao mesmo denominador é transformá-las em outras eqüivalentes, isto é, com o mesmo valor, e homogêneas.

Dadas duas ou mais frações não homogêneas, é sempre possível torná-las homogêneas, sem que o seu valor se altere de acôrdo com o teorema já conhecido. (§87)

A transformação de frações não homogêneas em homogêneas, ou a redução de frações ao mesmo denominador, é feita de acôrdo com dois processos diferentes. Ambos nos permitem reduzir as frações dadas ao mesmo denominador, mas o segundo nos dá as mesmas frações reduzidas ao *menor denominador comum*, como veremos nos parágrafos seguintes.

Observação. Antes de tornar homogêneas duas ou mais frações, é necessário torná-las irredutíveis.

91. Redução de frações ao mesmo denominador. Consideremos as frações $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{4}{9}$. Podemos multiplicar os dois têrmos de uma fração por um mesmo número, sem que o valor desta fração se altere. (§87) Neste caso, multipliquemos os dois têrmos da fração $\frac{5}{6}$ por $4 \times 8 \times 9$, isto é, *pelo produto dos*

denominadores das outras; multipliquemos os dois têrmos da fração $\frac{3}{4}$ por 6×8×9, isto é, *pelo produto dos denominadores das outras*, e assim por diante. Feitas as operações indicadas, teremos:

$$\frac{5}{6} = \frac{5\times4\times8\times9}{6\times4\times8\times9} = \frac{1\,440}{1\,728} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3\times6\times8\times9}{4\times6\times8\times9} = \frac{1\,296}{1\,728}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3\times6\times4\times9}{8\times6\times4\times9} = \frac{648}{1\,728} \qquad \frac{4}{9} = \frac{4\times6\times4\times8}{9\times6\times4\times8} = \frac{768}{1\,728}$$

Regra. *Para reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador, é bastante multiplicar os dois têrmos de cada fração pelo produto dos denominadores das outras.*

92. Redução de frações ao menor denominador comum. Consideremos as frações $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, e $\frac{4}{9}$. O m. m. c. dos deominadores é 72. Dividamos 72 por cada um dos denominadores. Os quocientes respectivos, da esquerda para a direita, serão 12, 18, 9 e 8. Ora, já aprendemos que uma fração não muda de valor, se multiplicarmos seus têrmos por um mesmo número. Multipliquemos então os têrmos da primeira fração por 12; da segunda, por 18; da terceira, por 9; da quarta, por 8. Obteremos quatro frações homogêneas e eqüivalentes, respectivamente, às quatro frações dadas. A disposição prática da operação é a seguinte:

$$\begin{array}{cccc} \frac{5}{6}, & \frac{3}{4}, & \frac{3}{8}, & \frac{4}{9} \\ (12) & (18) & (9) & (8) \\ \frac{60}{72}, & \frac{54}{72}, & \frac{27}{72}, & \frac{32}{72}, \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 6, & 4, & 8, & 9 & 2 \\ 3, & 2, & 4, & 9 & 2 \\ 3, & 1, & 2, & 9 & 2 \\ 3, & 1, & 1, & 9 & 3 \\ 1, & 1, & 1, & 3 & 3 \\ \hline 1, & 1, & 1, & 1 & 72 \end{array}$$

Na primeira linha figuram as frações dadas; na segunda, entre parênteses, os quocientes das divisões do m. m. c. dos denominadores, por cada um dêstes; na terceira, as frações homogêneas eqüivalentes às frações dadas.

Pedimos aos nossos estudantes que demonstrem:

I. Na pesquiza do m. m. c. dos denominadores das frações dadas neste parágrafo, é inútil considerar o denominador 4; bastaria calcular o m. m. c. de 6, 8 e 9.

II. Na prática, a linha dos quocientes pode ser suprimida.

III. Por que motivo as frações da terceira linha se apresentam com o mesmo denominador?

A redução de frações ao menor denominador comum pode ser resumida na seguinte

Regra. *Para reduzir duas ou mais frações ao menor denominador comum, calcula-se o m. m. c. dos denominadores; divide-se o m. m. c. obtido por cada um dos denominadores das frações dadas; multiplicam-se os dois têrmos de cada uma das frações dadas pelo quociente correspondente.*

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} &= \frac{1\,440}{1\,728} = \frac{60}{72} \\ \frac{3}{4} &= \frac{1\,296}{1\,728} = \frac{54}{72} \\ \frac{3}{8} &= \frac{648}{1\,728} = \frac{27}{72} \\ \frac{4}{9} &= \frac{768}{1\,728} = \frac{32}{72} \end{aligned}$$

Os resultados obtidos neste parágrafo e no anterior estão no quadro ao lado.

Observando-os concluímos que o segundo processo é mais conveniente do que o primeiro porque pelo primeiro, as frações dadas *ficam reduzidas ao mesmo denominador* ao passo que, pelo segundo, ficam *reduzidas ao menor denominador comum.* Entretanto, quando os denominadores são primos entre si, dois a dois, os dois processos conduzem ao mesmo resultado. (§81) É o que os estudantes devem verificar, reduzindo ao mesmo denominador, pelos dois processos, as frações: $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ e $\frac{4}{9}$.

Exercícios orais

Reduzir ao mesmo denominador:

1. $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$
2. $\frac{2}{5}, \frac{7}{10}$
3. $\frac{4}{9}, \frac{5}{6}$
4. $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}$
5. $\frac{7}{8}, \frac{3}{5}$
6. $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$
7. $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$
8. $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$
9. $\frac{7}{8}, \frac{5}{6}$
10. $\frac{3}{4}, \frac{2}{7}$

Exercícios. Série XXX

1. Reduzir as frações $\frac{7}{15}, \frac{11}{18}, \frac{17}{20}, \frac{19}{24}$ e $\frac{23}{30}$ ao mesmo denominador.
2. Tornar homogêneas as frações $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{7}$ e $\frac{4}{9}$, pelos dois processos.
3. Escrever as 10 frações de termos mais simples, iguais a $\frac{3}{5}$.

4. Escrever as 10 frações de termos mais simples, iguais a $\frac{4}{7}$.

93. Comparação de frações. Para indicar que um número é maior que outro, colocamos entre ambos um ângulo com a abertura voltada para o maior. Assim, $8>3$ significa 8 *é maior que* 3; $3<8$ significa 3 *é menor que* 8.

I. Quando duas ou mais frações têm o mesmo denominador, a fração maior é aquela que tem o numerador maior. Consideremos as frações $\frac{8}{15}$ e $\frac{3}{15}$. Ora, se a unidade foi dividida em quinze partes iguais, é evidente que $\frac{8}{15} > \frac{3}{15}$.

Consideremos as frações $\frac{7}{15}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{9}{15}$ e $\frac{13}{15}$. É evidente que $\frac{13}{15} > \frac{11}{15} > \frac{9}{15} > \frac{7}{15}$.

II. Quando duas ou mais frações têm o mesmo numerador, a fração maior é aquela que tem o denominador menor. Consideremos as frações $\frac{4}{9}$ e $\frac{4}{7}$. O denominador da primeira nos diz que uma unidade qualquer, uma maçã, por exemplo, foi dividida em *nove partes iguais.* O denominador da segunda é 7, portanto, a segunda unidade, outra maçã, foi dividida em *sete partes iguais.* Ora, é evidente que $\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$. Logo, $\frac{2}{7} > \frac{2}{9}$, $\frac{3}{7} > \frac{3}{9}$ e $\frac{4}{7} > \frac{4}{9}$. Precisamos admitir, é claro, que as duas unidades que foram divididas respectivamente em *sete* e em *nove partes iguais, são iguais.* Se dois viajantes percorreram respectivamente, $\frac{4}{7}$ e $\frac{4}{9}$ da Rodovia Presidente Dutra, o primeiro andou mais do que o segundo; mas, se o primeiro percorreu $\frac{4}{7}$ da Rodovia Recife-Olinda, ao passo que o segundo percorreu $\frac{4}{9}$ da Rodovia Presidente Dutra, então o segundo andou mais do que o primeiro.

Consideremos as frações $\frac{7}{11}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{13}$ e $\frac{7}{10}$. É evidente que $\frac{7}{9} > \frac{7}{10} > \frac{7}{11} > \frac{7}{13}$.

Quando duas frações não são homogêneas ou não têm o mesmo numerador, é fácil, na maioria dos casos, dizer qual é

a maior e qual a menor. Por exemplo, dadas as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{9}$, é fácil de estabelecer que $\frac{3}{5} > \frac{4}{9}$. Em alguns casos excepcionais será mais cômodo torná-las homogêneas ou reduzí-las ao mesmo numerador.

Exercícios. Série XXXI

1. Comparar as frações $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{15}$ e $\frac{17}{24}$ e verificar qual é a maior e qual a menor.

$$\begin{array}{cccc}
\frac{3}{4} & \frac{7}{10} & \frac{11}{15} & \frac{17}{24} \\
(30) & (12) & (8) & (5) \\
\frac{90}{120} & \frac{84}{120} & \frac{88}{120} & \frac{85}{120}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c}
10, & 15, & 24 & 2 \\
5, & 15, & 12 & 2 \\
5, & 15, & 6 & 2 \\
5, & 15, & 3 & 3 \\
5, & 5, & 1 & 5 \\
\cline{4-4}
1, & 1, & 1 & 120
\end{array}$$

Resposta. $\begin{cases} \frac{3}{4} > \frac{11}{15} > \frac{17}{24} > \frac{7}{10} \\ \frac{7}{10} < \frac{17}{24} < \frac{11}{15} < \frac{3}{4} \end{cases}$

2. Colocar em ordem de grandeza crescente e decrescente as seguintes frações: $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{15}{16}$ e $\frac{17}{20}$.

3. Reduzir as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ *ao mesmo numerador.*

N. B. É bastante multiplicar os dois têrmos de cada uma das frações *pelo produto dos numeradores das outras.* (§91)

4. Colocar em ordem de grandeza crescente e decrescente as frações $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{9}{19}$ e $\frac{8}{17}$, reduzindo-as ao menor numerador comum.

N. B. Veja-se a regra do §92, substituindo-se a palavra *denominador* pela palavra *numerador.*

5. Dadas as frações $\frac{5}{43}$, $\frac{7}{46}$ e $\frac{10}{47}$, pergunta-se qual é a maior e qual a menor. Para responder a esta pergunta o que é mais conveniente: reduzir as frações dadas *ao mesmo denominador* ou *ao mesmo numerador?*

6. Reduzir as frações $\frac{7}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{43}$, $\frac{14}{19}$ e $\frac{20}{73}$ ao mesmo numerador comum.

7. $\frac{3}{8}$ de uma peça de fazenda custam Cr\$ 48,00. Qual o preço da peça?

8. Paguei Cr\$ 56,00 por $\frac{7}{12}$ de uma peça de fazenda. Qual é o custo de tôda a peça?

9. O número 13 300 representa $\frac{19}{40}$ da população de uma cidade. Qual é a população desta cidade?

10. Um automobilista, depois de ter percorrido 572 quilômetros, foi informado de que já tinha percorrido $\frac{11}{36}$ da estrada. Qual é o comprimento total da estrada?

11. Paguei Cr$ 910,00 por $\frac{13}{90}$ do valor de um automóvel. Qual é o valor dêste automóvel?

12. De uma cesta de jaboticabas retiram-se 98, que representam $\frac{14}{51}$ de todo o conteúdo da cesta. Quantas jaboticabas continha a cesta?

13. Comprei $\frac{3}{8}$ de uma peça de fazenda e o restante vale Cr$ 65,00. Qual é o custo de toda a peça?

14. Um negociante vendeu $\frac{3}{16}$ de uma peça de fazenda. Depois vendeu o restante por Cr$ 91,00. Por quanto vendeu tôda a peça?

15. Em um combate morreram $\frac{7}{20}$ de um exército e restaram 9 100 homens. De quantos homens se compunha o exército?

16. Em um colégio foram aprovados 159 alunos e reprovados $\frac{7}{60}$ do total. Quantos alunos entraram em exame?

94. Propriedades das frações. *I. Somando-se* um número inteiro qualquer ao *numerador* de uma fração ordinária, o valor desta fração *aumenta.* Assim deve ser porque o valor da unidade fracionária permanece invariável, ao passo que o número delas aumenta. Por exemplo, dada a fração $\frac{5}{12}$, se somarmos 4 unidades ao numerador, resultará a fração $\frac{9}{12}$, cujo excesso sôbre a fração primitiva é evidentemente igual a $\frac{4}{12}$.

II. Somando-se um número inteiro qualquer ao *denominador* de uma fração, o valor desta fração *diminui.* Assim deve ser porque o valor da unidade fracionária se torna *menor*, sem que o número delas varie. Por exemplo, dada a fração $\frac{3}{5}$, se somarmos 4 unidades ao denominador, resultará a fração $\frac{3}{9}$. Ora, se $\frac{1}{5} > \frac{1}{9}$, então $\frac{3}{5} > \frac{3}{9}$. Reduzindo as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{9}$ ao mesmo denominador, verificaremos facilmente qual é o excesso da primeira sôbre a segunda.

III. Subtraindo-se um número inteiro qualquer do *numerador* de uma fração ordinária, o valor desta fração *diminui.* Assim

deve ser porque o valor da unidade fracionária permanece invariável, ao passo que o número delas diminui. Por exemplo, dada a fração $\frac{11}{12}$, se subtrairmos 4 unidades do numerador, resultará a fração $\frac{7}{12}$, e o excesso da fração $\frac{11}{12}$ sôbre a fração $\frac{7}{12}$ é evidentemente igual a $\frac{4}{12}$.

IV. Subtraindo-se um número inteiro qualquer do *denominador* de uma fração, o valor desta fração *aumenta*. Assim deve ser porque o valor da unidade fracionária se torna maior, sem que o número delas varie. Por exemplo, dada a fração $\frac{7}{15}$, se subtrairmos 4 unidades do denominador, resultará a fração $\frac{7}{11}$. Ora, se $\frac{1}{15} < \frac{1}{11}$, então $\frac{7}{15} < \frac{7}{11}$. Reduzindo as frações $\frac{7}{15}$ e $\frac{7}{11}$ ao mesmo denominador, verificaremos facilmente qual é o excesso da segunda sôbre a primeira.

V. Multiplicando-se o numerador de uma fração ordinária por um número inteiro qualquer, a fração fica *multiplicada* por êste mesmo número.

VI. Multiplicando-se o denominador de uma fração ordinária por um número inteiro qualquer, a fração fica *dividida* por êste mesmo número.

VII. Dividindo-se o numerador de uma fração ordinária por um número inteiro qualquer, a fração fica dividida por êste mesmo número.

VIII. Dividindo-se o denominador de uma fração ordinária por um número inteiro qualquer, a fração fica *multiplicada* por êste mesmo número.

Observação. Deixamos a verificação das quatro últimas propriedades ao cuidado dos estudantes, o que êles conseguirão facilmente, recortando papel ou fazendo os respectivos gráficos.

Exercícios orais

1. Tornar a fração $\frac{7}{48}$, seis vêzes maior, sem alterar o denominador.

2. Tornar a fração $\frac{11}{30}$, três vêzes maior, sem alterar o numerador.

3. Tornar a fração $\frac{15}{36}$, cinco vêzes menor, sem alterar o denominador.

4. Tornar a fração $\frac{3}{4}$, sete vêzes menor, sem alterar o numerador.

5. De quantos modos uma fração pode ser multiplicada por um número inteiro?

6. De quantos modos uma fração pode ser dividida por um número inteiro?

95. Adição de frações ordinárias. *A adição de frações ordinárias é a operação que tem por fim reunir, em uma única fração, as diferentes unidades fracionárias de que são formadas duas ou mais frações dadas.*

Sejam as frações $\frac{3}{20}$, $\frac{5}{20}$ e $\frac{7}{20}$, das quais se pede a soma. Teremos: $\frac{3}{20} + \frac{5}{20} + \frac{7}{20} = \frac{15}{20}$.

Admite-se, é claro, que as diferentes unidades que foram divididas em vigésimos, são iguais. Se assim é, *três vigésimos mais cinco vigésimos mais sete vigésimos* é igual, evidentemente, a *quinze vigésimos.*

Regra. *Para somar duas ou mais frações homogêneas, somam-se os numeradores e conserva-se o mesmo denominador.*

Observação. Para somar frações homogêneas, somam-se os numeradores; ora, os numeradores sendo números inteiros, e a adição dêstes números sendo *comutativa* e *associativa,* (§ 21) concluímos que a adição de frações ordinárias é também *comutativa* e *associativa.*

É sempre útil simplificar a fração resultante ou transformá-la em número mixto, se for uma fração imprópria. Se as frações dadas não são homogêneas, é preciso torná-las homogêneas. (§ 90) Se entre as frações dadas houver números inteiros ou mixtos, é conveniente primeiramente reduzí-los a frações impróprias. (§ 86)

1. $\frac{7}{15} + \frac{11}{15} + \frac{8}{15} + \frac{13}{15} + \frac{1}{15} = \frac{40}{15} = 2\frac{10}{15} = 2\frac{2}{3}$

2. $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{2}{5} + \frac{7}{10} + \frac{2}{9} =$

$\quad$ (45) $\quad$ (30) $\quad$ (36) $\quad$ (18) $\quad$ (20)

$\frac{135}{180} + \frac{150}{180} + \frac{72}{180} + \frac{126}{180} + \frac{40}{180} =$

$\frac{523}{180} = 2\frac{163}{180}$

4,	6,	10,	9	2
2,	3,	5,	9	2
1,	3,	5,	9	3
1,	1,	5,	3	3
1,	1,	5,	1	5
1,	1,	1,	1	180

3. $\frac{18}{36} + 2 + 3\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + 1\frac{2}{5} + \frac{7}{10} =$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{10}{3} + \frac{3}{4} + \frac{7}{5} + \frac{7}{10} =$$

(30) (60) (20) (15) (12) (6)

$$\frac{30}{60} + \frac{120}{60} + \frac{200}{60} + \frac{45}{60} + \frac{84}{60} + \frac{42}{60} =$$

$$\frac{521}{60} = 8\frac{41}{60}$$

3,	4,	10	2
3,	2,	5	2
3,	1,	5	3
1,	1,	5	5
1,	1,	1	60

4. $\frac{25}{50} + 3\frac{1}{3} + \frac{5}{8} + 2 + 4\frac{3}{4} + \frac{20}{25} + 5\frac{4}{9} = ?$

Em primeiro lugar simplificamos as frações que podem ser simplificadas.

$$\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} + \frac{5}{8} + 2 + 4\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + 5\frac{4}{9} = ?$$

Depois, lembrando que a adição de frações é também comutativa e associativa, teremos sucessivamente:

$$(3 + 2 + 4 + 5) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{4}{9}\right) =$$

$$14 + \left(\frac{180}{360} + \frac{120}{360} + \frac{225}{360} + \frac{270}{360} + \frac{288}{360} + \frac{160}{360}\right) =$$

$$14 + \frac{1\,243}{360} = 14 + 3\frac{163}{360} = 17\frac{163}{360}$$

96. Subtração de frações ordinárias. *A subtração de frações ordinárias é a operação que tem por fim, dadas duas frações numa certa ordem,* $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, *sendo* $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, *achar uma terceira fração* $\frac{m}{n}$ *que, somada com a fração* $\frac{c}{d}$ *reproduza a fração* $\frac{a}{b}$.

Por exemplo, dadas as frações $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{5}$, a subtração tem por fim descobrir a fração que, somada com $\frac{3}{5}$, dá $\frac{7}{8}$. A fração procurada é o *resto, excesso* ou *diferença* da operação.

Sejam as frações $\frac{17}{20}$ e $\frac{6}{20}$ das quais se pede a diferença. Esta diferença é, evidentemente, $\frac{11}{20}$.

Regra. *Para subtrair uma fração de outra, sendo ambas homogêneas, subtrai-se o numerador da segunda, do numerador da primeira, e conserva-se o mesmo denominador.*

Observação. É sempre útil simplificar a fração resultante, ou transformá-la em número mixto, se for uma fração imprópria. Se as frações dadas não são homogêneas, é preciso torná-las homogêneas. Se o minuendo ou subtraendo é um número inteiro ou mixto, é conveniente reduzí-lo à fração imprópria.

1. $\frac{11}{15} - \frac{8}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

2. $\frac{7}{8} - \frac{3}{5} = \frac{35}{40} - \frac{24}{40} = \frac{11}{40}$

3. $4\frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{13}{3} - \frac{5}{6} = \frac{26}{6} - \frac{5}{6} = \frac{21}{6} = 3\frac{3}{6} = 3\frac{1}{2}$

4. $5\frac{3}{4} - 2\frac{5}{6} = \frac{23}{4} - \frac{17}{6} = \frac{69}{12} - \frac{34}{12} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$

5. $7 - \frac{3}{4} = \frac{28}{4} - \frac{3}{4} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

6. $9 - 3\frac{3}{10} = \frac{90}{10} - \frac{31}{10} = \frac{59}{10} = 5\frac{9}{10}$

Exercícios. Série XXXII

1. $\frac{3}{5} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} + 5\frac{7}{10} + \frac{11}{12} + 1\frac{1}{6} + \frac{7}{15} = ?$

2. Demonstrar a seguinte regra: *Para, de um número inteiro, subtrair uma fração,* ***multiplica-se*** *o inteiro pelo denominador, do produto subtrai-se o numerador e* ***toma-se*** *o mesmo denominador.* Por exemplo,

$$4 - \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5 - 3}{5} = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{3}$$

3. Comprei $\frac{3}{8} - \frac{7}{24}$ de uma peça de fazenda por Cr$ 102,00. Quanto custa a peça toda?

4. $\frac{11}{15} - \frac{3}{10}$ de um fardo de algodão pesam 65 quilogramas. Qual é o pêso do fardo?

5. Um viajante percorreu $\frac{7}{10} + \frac{4}{9} - \frac{5}{6}$ de uma estrada, ao todo 476 quilômetros. Qual é o comprimento da estrada?

6. Em um colégio foram aprovados $\frac{4}{15} + \frac{3}{10} + \frac{5}{12}$ dos alunos inscritos para prestarem exames, ao todo 413. Quantos alunos se inscreveram?

7. Um automobilista já percorreu $\frac{7}{20} + \frac{8}{15}$ de uma estrada e tem ainda 84 quilômetros a percorrer. Qual é o comprimento da estrada?

97. Expressões aritméticas fracionárias. Aprendemos (§ 26) em que consiste uma expressão aritmética, e como se calcula. A expressão aritmética pode ser fracionária, isto é, conter também uma ou mais frações. Para calculá-la, é necessário obedecer aos preceitos seguintes:

1.°) Transformar os números inteiros e mixtos em frações; 2.°) tornar as frações homogêneas; 3.°) aplicar a regra do § 26.

Exemplo

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{10}+2+3\frac{1}{2}-5\frac{2}{3}+3\frac{1}{6}-\frac{4}{9}=$$

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{10}+\frac{2}{1}+\frac{7}{2}-\frac{17}{3}+\frac{19}{6}-\frac{4}{9}=$$

(45) (18) (180) (90) (60) (30) (20)

$$\frac{135}{180}-\frac{54}{180}+\frac{360}{180}+\frac{630}{180}-\frac{1\,020}{180}+\frac{570}{180}-\frac{80}{180}=$$

4,	10,	6,	9	2
2,	5,	3,	9	2
1,	5,	3,	9	3
1,	5,	1,	3	3
1,	5,	1,	1	5
1,	1,	1,	1	180

m. m. c. = 180

$$\left(\frac{135}{180}+\frac{360}{180}+\frac{630}{180}+\frac{570}{180}\right)-\left(\frac{54}{180}+\frac{1\,020}{180}+\frac{80}{180}\right)=$$

$$\frac{1\,695}{180}-\frac{1\,154}{180}=\frac{541}{180}=3\frac{1}{180}$$

Exercícios. Série XXXIII

1. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=$

2. $\frac{3}{5}-\frac{4}{9}+2+3\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}-2\frac{1}{3}+7=$

3. $\frac{9}{10}-4-\frac{1}{5}+\frac{11}{20}+3\frac{5}{8}+2\frac{1}{3}+5\frac{1}{4}-\frac{11}{20}=$

4. $3-2\frac{1}{5}+\frac{4}{9}+1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}-\frac{9}{10}+1\frac{8}{15}-\frac{19}{10}=$

98. Multiplicação de frações ordinárias. *A multiplicação de um número inteiro por outro número também inteiro, é a operação que tem por fim efetuar uma adição de tantas parcelas iguais ao primeiro, quantas são as unidades do segundo.* Isto quer dizer que, multiplicar 47 por 5 é efetuar a adição de 5 parcelas iguais a 47. Portanto, 47×5=47+47+47+47+47=235. (§ 29)

No caso de $\frac{3}{4} \times 5$, embora $\frac{3}{4}$ não seja um número inteiro, ainda podemos recorrer à definição dada, para calcular $\frac{3}{4} \times 5$, escrevendo: $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$. Portanto, para multiplicar uma fração por um número inteiro, multiplica-se o numerador pelo inteiro e conserva-se o mesmo denominador.

Consideremos agora o seguinte exemplo: $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$. Como efetuar esta multiplicação? O multiplicando, isto é, *o valor da parcela*, é $\frac{3}{4}$; mas o multiplicador, isto é, *o número de parcelas*, é $\frac{5}{8}$! Que significação têm estas palavras: *efetuar uma adição cujo número de parcelas é igual a* $\frac{5}{8}$?! Nenhuma significação, evidentemente. Portanto, a definição da multiplicação, aprendida no § 29, não pode ser aplicada ao cálculo de $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$; é uma definição particular que nos permite calcular expressões aritméticas como 75×18 ou $\frac{7}{15} \times 9$, mas que não nos permite calcular $7 \times \frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$. A definição geral da multiplicação, e que convém a números inteiros e fracionários, é a seguinte:

Dados dois números em uma certa ordem, o primeiro chamado ***multiplicando,*** *e o segundo,* ***multiplicador,*** *a multiplicação é a operação que tem por fim calcular um terceiro número chamado* ***produto,*** *que seja, em relação ao multiplicando, o que o multiplicador é, em relação à unidade.*

Seja a expressão 37×25. O segundo número contém a unidade 25 vêzes. Logo, o terceiro, isto é, o produto, deve conter 25 vêzes o primeiro, isto é, deve conter 25 vêzes o número 37. Portanto, $37 \times 25 = 37 + 37 + 37 + 37 + 37 + 37 + \ldots = 925$.

Seja a expressão $\frac{3}{4} \times 5$. O segundo número contém a unidade 5 vêzes. Logo, o terceiro deve conter 5 vêzes o primeiro, isto é, deve conter 5 vêzes o número $\frac{3}{4}$. Portanto, $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Seja a expressão $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$. O segundo número representa *cinco oitavos* da unidade. Logo, o terceiro deve representar *cinco oitavos do primeiro*, isto é, deve representar $\frac{5}{8}$ de $\frac{3}{4}$. Ora,

um oitavo de $\frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{4} \div 8 = \frac{3}{4 \times 8} = \frac{3}{32}$ (§94, sexta propriedade)

cinco oitavos de $\frac{3}{4}$ ou $5 \times \frac{3}{32} = \frac{5 \times 3}{32} = \frac{15}{32}$ (§94, quinta propriedade)

Observando êste resultado notamos que: *o numerador da fração resultante é o produto dos numeradores das frações dadas; o denominador da fração resultante é o produto dos denominadores das frações dadas.* Ora, se repetirmos todo o raciocínio que fizemos neste exemplo, com outros exemplos, $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{15}$, etc., chegaremos sempre à mesma conclusão. Portanto, podemos estabelecer a seguinte

Regra. *Para multiplicar-se uma fração por outra, é bastante formar-se uma fração cujo numerador seja o produto dos numeradores das frações dadas, e cujo denominador seja o produto dos denominadores das frações dadas.*

Se um dos fatôres é número inteiro ou mixto, é conveniente reduzí-lo à fração imprópria.

E não esqueçamos que multiplicar $\frac{3}{4}$ *por* $\frac{5}{8}$, *é calcular* $\frac{5}{8}$ *de* $\frac{3}{4}$; *multiplicar* 42 *por* $\frac{1}{7}$ *é calcular* $\frac{1}{7}$ *de* 42, etc..

Exemplos.

1. $\frac{7}{8} \times \frac{5}{6} = \frac{35}{48}$

2. $3\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{7}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{28}{14} = 2$

3. $\frac{5}{6} \times 3\frac{2}{5} = \frac{5}{6} \times \frac{17}{5} = \frac{85}{30} = 2\frac{25}{30} = 2\frac{5}{6}$

4. $4\frac{1}{2} \times 3\frac{2}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{11}{3} = \frac{99}{6} = 16\frac{3}{6} = 16\frac{1}{2}$

5. $7 \times 3\frac{2}{5} = \frac{7}{1} \times \frac{17}{5} = \frac{119}{5} = 23\frac{4}{5}$

6. $7\frac{2}{3} \times 5 = \frac{23}{3} \times \frac{5}{1} = \frac{115}{3} = 38\frac{1}{3}$

99. Simplificação na multiplicação de frações ordinárias. Consideremos a expressão aritmética seguinte: $\frac{3}{4} \times 5\frac{4}{5} \times \frac{25}{58} \times \frac{4}{21}$. Para calcular esta expressão, devemos multiplicar $\frac{3}{4}$ por $5\frac{4}{5}$; em seguida, multiplicar o produto obtido por $\frac{25}{58}$; depois multiplicar o segundo produto por $\frac{4}{21}$. Teremos:

$$\frac{3}{4} \times 5\frac{4}{5} \times \frac{25}{58} \times \frac{4}{21} = \frac{3}{4} \times \frac{29}{5} \times \frac{25}{58} \times \frac{4}{21} =$$

$$= \frac{3 \times 29 \times 25 \times 4}{4 \times 5 \times 58 \times 21} = \frac{8\,700}{24\,360} = \frac{5}{14}$$

Portanto, a expressão dada é igual a $\frac{5}{14}$. Entretanto, poderíamos obter mais depressa êste resultado, suprimindo prèviamente os fatôres comuns a ambos os têrmos da fração resultante.

$$\frac{3}{4} \times 5\frac{4}{5} \times \frac{25}{58} \times \frac{4}{21} = \frac{3 \times 29 \times 25 \times 4}{4 \times 5 \times 58 \times 21}$$

Para simplificar uma fração, dividem-se os dois têrmos por um dos seus divisores comuns; dividem-se os dois têrmos da fração resultante por um dos seus divisores comuns; e assim, sucessivamente. (§ 88) Vamos aplicar êste processo de simplificação à fração

$$\frac{3 \times 29 \times 25 \times 4}{4 \times 5 \times 58 \times 21} \qquad \text{(A)}$$

antes de efetuar as multiplicações.

Para dividir um produto indicado por um de seus fatôres, é bastante suprimir êste fator. Para dividir um produto indicado por um número qualquer, é bastante dividir um dos fatôres por êste número, se a divisão for possível. (§ 65) Voltando à fração (A), notemos que seus têrmos são produtos indicados, e ambos contêm o fator 4. Dividamos então os dois têrmos desta fração, por 4, suprimindo o fator 4. Resultará:

$$\frac{3 \times 29 \times 25}{5 \times 58 \times 21}$$

Observando os dois têrmos desta fração notamos que o numerador contém o fator 29, e o denominador contém o fator 58,

que é divisível por 29. Dividamos então os dois têrmos por 29, suprimindo o fator 29, no numerador, e dividindo o fator 58, do denominador, por 29. Resultará:

$$\frac{3 \times 25}{5 \times 2 \times 21}$$

A seguir, suprimimos o fator 5 em ambos os têrmos da fração, e depois o fator 3. E teremos sucessivamente:

$$\frac{3 \times 25}{5 \times 2 \times 21} = \frac{3 \times 5}{2 \times 21} = \frac{5}{14}$$

Regra. *Para efetuar uma multiplicação de números fracionários, indica-se a multiplicação dos numeradores, assim como dos denominadores; em seguida, suprimem-se todos os fatôres comuns aos dois têrmos da fração; finalmente, multiplicam-se os fatôres que não foram suprimidos.*

100. Divisão de frações ordinárias. Já vimos anteriormente (§34) qual é a definição geral da divisão. Extendendo esta definição aos números fracionários, diremos que dividir $\frac{3}{5}$ por $\frac{7}{8}$ é achar uma fração que, multiplicada por $\frac{7}{8}$ reproduza a fração $\frac{3}{5}$.

Seja x esta fração que, multiplicada por $\frac{7}{8}$, reproduz a fração $\frac{3}{5}$. Teremos sucessivamente:

$$x \times \frac{7}{8} = \frac{3}{5} \;\therefore\; \frac{7}{8} \text{ de } x = \frac{3}{5} \;\therefore\; (*)$$

$$\frac{1}{8} \text{ de } x = \frac{3}{5} \div 7 = \frac{3}{5 \times 7} \quad (\S 94, \text{ sexta propriedade})$$

$$\frac{8}{8} \text{ de } x \text{ (isto é, } x) = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} \quad (\S 94, \text{ quinta propriedade})$$

Observando-se êste resultado verifica-se que dividir $\frac{3}{5}$ por $\frac{7}{8}$ é o mesmo que multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{8}{7}$. Ora, se repetirmos todo o raciocínio que fizemos neste exemplo, com outros exem-

(*) O sinal $\therefore$ significa *donde, logo, portanto,* etc..

plos, $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$, $\frac{4}{9} \div \frac{7}{10}$, $\frac{11}{20} \div \frac{13}{30}$, etc., chegaremos sempre à mesma conclusão. Podemos, pois, estabelecer a seguinte

Regra. *Para dividir uma fração por outra, é bastante multiplicar a primeira fração pela segunda fração invertida.*

Se o dividendo ou o divisor é número inteiro ou mixto, é conveniente, primeiramente, dar-lhe a forma de fração.

1. $\frac{3}{5} \div \frac{6}{11} = \frac{3}{5} \times \frac{11}{6} = \frac{11}{10} = 1\frac{1}{10}$

2. $4\frac{2}{3} \div \frac{7}{10} = \frac{14}{3} \times \frac{10}{7} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

3. $8 \div \frac{3}{5} = \frac{8}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$

4. $7\frac{3}{4} \div 62 = \frac{31}{4} \div \frac{62}{1} = \frac{31}{4} \times \frac{1}{62} = \frac{1}{8}$

101. Fração de fração. *Problema.* Carlos tinha $\frac{5}{8}$ de um bôlo. Comeu $\frac{3}{4}$ dêstes $\frac{5}{8}$. Pergunta-se qual a fração do bôlo que Carlos comeu.

Para responder a esta pergunta é necessário calcular $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$, isto é, *uma fração de outra fração.*

Ora, $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$ significa $\frac{5}{8} \times \frac{3}{4}$. (§ 98) Portanto, $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{8}$ $= \frac{5}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{32}$. Donde se conclue que:

I. *Para calcular uma **fração de fração**, é bastante multiplicar a primeira pela segunda.*

II. *A preposição **de**, entre duas frações, indica que a primeira deve ser multiplicada pela segunda.*

1. $\frac{3}{4}$ de $5\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{2} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$

2. $2\frac{3}{5}$ de $3\frac{2}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{11}{3} = \frac{143}{15} = 9\frac{8}{15}$

3. $\frac{5}{6}$ de $720 = \frac{5}{6} \times \frac{720}{1} = \frac{3\,600}{6} = 600$.

Exercícios orais

1. $\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} =$	5. $\frac{7}{8} \div \frac{7}{5} =$	9. $\frac{3}{4}$ de 12 =	13. $\frac{7}{10} \times \frac{10}{7} =$
2. $7 \times \frac{2}{5} =$	6. $4 \div \frac{3}{5} =$	10. $\frac{5}{6}$ de 15 =	14. $7 \times \frac{1}{7} =$
3. $2\frac{1}{2} \times 4 =$	7. $7 \div \frac{7}{10} =$	11. $\frac{2}{3}$ de $4\frac{1}{2}$ =	15. $\frac{1}{8} \times 8 =$
4. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} =$	8. $2\frac{1}{2} \div \frac{5}{6} =$	12. $\frac{3}{8} \times \frac{8}{3} =$	16. $3\frac{1}{2} \times \frac{2}{7} =$

Exercícios. Série XXXIV

1. Calcular, com uma única operação, $\frac{5}{8}$ de Cr$ 534,00.

2. Calcular, com uma única operação, $\frac{3}{16}$ de Cr$ 2 748,00.

3. Calcular, com uma única operação, $\frac{15}{24}$ de Cr$ 37 638,00.

4. Carlos comeu $\frac{5}{8}$ de um bôlo; mais tarde comeu $\frac{3}{7}$ do resto do bôlo. Que fração do bôlo êle comeu?

5. Um menino recebeu uma cesta de jaboticabas. Deu a um irmão $\frac{3}{5}$ do conteúdo da cesta, e a outro, $\frac{2}{3}$ do resto. Ficou com 48 jaboticabas. Quantas eram as jaboticabas ao todo?

6. Qual é a fração que, dividida por $2\frac{1}{3}$ dá um quociente igual a $\frac{3}{4}$ do divisor?

7. Dividindo-se $\frac{3}{4}$ por um certo número, o quociente obtido é igual a $\frac{2}{5}$ do dividendo. Qual é o número?

8. Recebi uma certa quantia. Gastei $\frac{3}{8}$ dela em uma primeira compra, e $\frac{1}{4}$ do resto em uma segunda compra. Sobraram ainda Cr$ 840,00. Qual foi a quantia por mim recebida?

9. Recebí uma certa quantia. Gastei $\frac{2}{9}$ dela; depois gastei $\frac{3}{4}$ do resto; em seguida gastei $\frac{3}{14}$ do segundo resto. Sobraram aînda Cr$ 594,00. Qual foi a quantia por mim recebida?

10. Paguei Cr$ 12 300,00 por $\frac{2}{3}$ dos $\frac{3}{4}$ dos $\frac{4}{5}$ do valor de um automóvel. Qual o preço do automóvel?

11. Por que número é necessário dividir a fração $\frac{9}{10}$, para que o quociente seja igual a $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{9}$ de $\frac{7}{10}$ do dividendo?

12. Se $\frac{7}{15}$ de uma casa valem Cr$ 37 800,00 quanto valerão $\frac{32}{45}$ da mesma casa?

102. A fração ordinária considerada como um quociente. *A fração ordinária é o número que representa uma ou mais partes de uma unidade que foi dividida em partes iguais.* (§ 82)

Vamos agora resolver o seguinte problema: *dividindo-se 5 maçãs por 8 meninos, de modo que cada um dêles receba a mesma quantidade de maçãs, qual será a parte de cada um?*

É evidente que cada um dos meninos não pode receber uma maçã inteira porque as maçãs são *cinco e os meninos são oito*. Mas cada uma das maçãs pode ser dividida em qualquer número de partes iguais e, de acôrdo com o nosso problema, para que a distribuição ou divisão das maçãs seja feita com facilidade, convém dividir cada uma delas em *oito partes iguais*. Cada uma das fatias será *um oitavo* da maçã. E, se as maçãs são cinco, então o número total de fatias ou de *oitavos* será *quarenta*. Ora, dividindo as *quarenta* fatias de maçãs, ou *quarenta oitavos*, pelos *oito meninos*, cada um dêles receberá cinco fatias de maçã ou *cinco oitavos* e não haverá resto. Portanto,

$$5 \text{ maçãs} \div 8 \text{ meninos} = \frac{5}{8} \text{ de maçã} \therefore 5 \div 8 = \frac{5}{8}$$

Variando o número de maçãs e o número de meninos, substituindo maçãs e meninos por outras unidades quaisquer, e repetindo todo o raciocínio que acabámos de fazer, chegaremos sempre ao mesmo resultado. Podemos então estabelecer que:

Uma fração ordinária pode ser considerada como o quociente da divisão do numerador pelo denominador.

Exemplos.

1. $15 \div 45 = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$
2. $22 \div 55 = \frac{22}{55} = \frac{2}{5}$
3. $72 \div 14 = \frac{72}{14} = 5\frac{1}{7}$
4. $7 \div 8 = \frac{7}{8}$
5. $3 \div 10 = \frac{3}{10}$
6. $4 \div 9 = \frac{4}{9}$

7. Comprei 13 livros por Cr$ 60,00. Quanto teria pago por 52 livros iguais ao primeiro?

Solução. Para obter o preço de um livro é necessário dividir Cr$ 60,00 por 13. (*) Vamos tomar a fração $\frac{60}{13}$, como preço de cada livro. Ora, se um livro custa $\frac{60{,}00}{13}$, então 52 livros custarão $\frac{60{,}00}{13} \times 52$. Efetuando-se esta multiplicação, teremos: $\frac{60{,}00}{13} \times 52 = \frac{60{,}00}{13} \times \frac{52}{1} =$ Cr$ 240,00

Observação. Se tivéssemos de resolver êste problema, exclusivamente com o auxílio das quatro operações sôbre números inteiros, deveríamos, em primeiro lugar, dividir Cr$ 60,00 por 13. Obteríamos o quociente Cr$ 4,615 que representaria ***o preço aproximado, não exato,*** de cada livro, visto que o número 60 não é divisível por 13. Em seguida, multiplicando Cr$ 4,615 por 52, obteríamos, como preço dos 52 livros, o número Cr$ 239,98, o que não é verdade, porque o preço exato dos 52 livros é Cr$ 240,00.

Êste exemplo mostra eloqüentemente quanto é útil a interpretação dada às frações ordinárias, neste parágrafo. Graças a esta definição, obtivemos o preço exato dos 52 livros, evitámos a divisão de Cr$ 60,00 por 13, e a multiplicação de Cr$ 4,615 por *52*. O nosso único trabalho foi o de multiplicar Cr$ 60,00 por 4.

Vemos, pois, que *a fração eqüivale a um quociente.* Assim, com o auxílio das frações, a divisão, operação nem sempre possível no campo dos números naturais (§35) será, daqui por diante, uma operação sempre possível. E, para conseguir êste resultado, foi necessário que o nosso campo numérico (§4) se enriquecesse com mais uma categoria de números; ***os números fracionários.*** Outras categorias de números aparecerão mais tarde.

Exercícios. Série XXXV

1. Se 47 carneiros custam Cr$ 850,00 qual é o preço de 84 carneiros?

2. Comprei 360 litros de vinho por Cr$ 1 260,00. Quanto custarão 620 litros?

3. Pagando Cr$ 2 345,00 por 91 kg de chá, quanto pagarei por 147 kg?

4. Sabendo-se que 15 maçãs custam Cr$27,00, 18 peras custam Cr$31,50 e 27 pêssegos custam Cr$ 78,00, formar e calcular uma expressão aritmética que represente o custo de 24 maçãs, 25 peras e 36 pêssegos.

N. B. As igualdades dadas nos exercícios 5 a 18 não devem ser resolvidas como equações. O valor de x deverá ser calculado com o auxílio das quatro operações sôbre números inteiros e fracionários e dos princípios relativos a estas mesmas operações. Por exemplo, na igualdade $\frac{7}{8} \div \frac{2x}{5} = \frac{3}{4}$ qual o valor de x? $\frac{2x}{5} = \frac{7}{8} \div \frac{3}{4} \therefore \frac{2x}{5} = \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} \therefore \frac{2x}{5} = \frac{7}{6}$.

(*) A nova unidade monetária nacional, isto é, o cruzeiro, nos leva a antecipar a divisão de uma fração decimal por um número inteiro. Não há mal nisto, porque os estudantes já aprenderam esta operação no curso primário.

O mais simples será reduzir a quantia dada a centavos.

Considerando $2x$ como dividendo, 5 como divisor e $\frac{7}{6}$ como quociente, teremos: $2x = 5 \times \frac{7}{6} \therefore 2x = \frac{35}{6}$. E sendo $2x = \frac{35}{6}$, então $x = \frac{35}{6} \div 2 \therefore x = \frac{35}{12}$.

5. $\frac{3}{8} + x = \frac{5}{9}$

6. $x - 2\frac{1}{3} = \frac{5}{8}$

7. $7\frac{1}{2} - x = 5\frac{2}{3}$

8. $\frac{8}{9} \times x = \frac{11}{15}$

9. $\frac{9}{8} \div x = \frac{11}{20}$

10. $2x + \frac{5}{6} = \frac{7}{8}$

11. $3\frac{1}{4} + 3x = \frac{59}{10}$

12. $5x - \frac{7}{8} = 3\frac{1}{2}$

13. $5\frac{1}{2} - 4x = \frac{3}{5}$

14. $\frac{3}{4} \times 2x = \frac{7}{10}$

15. $5x \times \frac{7}{8} = 5\frac{1}{2}$

16. $3x \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

17. $\frac{x}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

18. $\frac{7}{10} \div \frac{x}{4} = 3\frac{1}{2}$

103. Divisão com resto. No parágrafo 34, dividindo 26 por 8, aprendemos que não existe um número natural que, multiplicado por 8, dê 26. Então tivemos de aceitar, como *quociente incompleto*, o número 3, por ser 3 o maior número que, multiplicado por 8, dá um produto inferior ao número 26. Graças, porém, ao que aprendemos no § 102, estamos habilitados agora a descobrir o número que, multiplicado por 8, reproduz o número 26. Teremos:

$$26 \div 8 = \frac{26}{8} = 3\frac{2}{8} = 3\frac{1}{4}$$

Com efeito, $3\frac{1}{4} \times 8 = \frac{13}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{104}{4} = 26$

Procuremos agora o quociente da divisão de 3 715 por 438. Efetuando a divisão acharemos o quociente incompleto 8 e o resto 211.

$$\begin{array}{r|l} 3\,715 & 438 \\ \hline 211 & 8 \end{array}$$

Logo, 8 não é o quociente exato da divisão de 3 715 por 438. Mas, $3\,715 \div 438 = \frac{3715}{438} = 8\frac{211}{438}$. Daremos a êste resultado o nome de *quociente completo* e, comparando êste resultado com a divisão efetuada, podemos estabelecer a seguinte

Regra. *Para completar o quociente de uma divisão, ou para obter o quociente completo da divisão de dois números, no caso em*

que o primeiro não é divisível pelo segundo, é bastante juntar ao quociente uma fração ordinária, cujo denominador é o divisor e cujo numerador é o resto da divisão.

No caso em que o dividendo é menor que o divisor, por exemplo, $5 \div 8$, escrevemos $\frac{5}{8}$. (§ 102) E assim uma fração ordinária, própria ou imprópria, é o *quociente completo* da divisão do numerador pelo denominador.

104. Expressões aritméticas fracionárias. Para calcular uma expressão aritmética fracionária em que entram as quatro operações, é necessário:

1.º) Transformar os números mixtos e inteiros em frações impróprias.

2.º) Substituir a preposição *de* pelo sinal que indica multiplicação.

3.º) Substituir o sinàl que indica divisão, pelo sinal que indica multiplicação, *tendo, porém, o cuidado de inverter as frações divisoras.*

4.º) Efetuar tôdas as multiplicações, *tendo o cuidado de suprimir os fatôres comuns.*

5.º) Aplicar a regra do § 26.

Exemplo. Calcular a expressão aritmética seguinte:

$$\frac{7}{8}+\frac{2}{3}\div 3\frac{3}{4}-4\times\frac{5}{6}+7\times\frac{2}{5}\div\frac{9}{10}-2\div\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\text{ de }5\frac{1}{2}$$

Transformando os números mixtos e os números inteiros em frações impróprias, teremos:

$$\frac{7}{8}+\frac{2}{3}\div\frac{15}{4}-\frac{4}{1}\times\frac{5}{6}+\frac{7}{1}\times\frac{2}{5}\div\frac{9}{10}-\frac{2}{1}\div\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\text{ de }\frac{11}{2}$$

Substituindo o sinal de divisão pelo sinal de multiplicação, e a preposição *de* pelo sinal de multiplicação, teremos:

$$\frac{7}{8}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{15}-\frac{4}{1}\times\frac{5}{6}+\frac{7}{1}\times\frac{2}{5}\times\frac{10}{9}-\frac{2}{1}\times\frac{2}{1}+\frac{3}{4}\times\frac{11}{2}$$

Efetuando as multiplicações, teremos:

$$\frac{7}{8}+\frac{8}{45}-\frac{10}{3}+\frac{28}{9}-\frac{4}{1}+\frac{33}{8}$$

Reduzindo ao menor denominador comum, teremos:

$$\frac{315}{360}+\frac{64}{360}-\frac{1\,200}{360}+\frac{1\,120}{360}-\frac{1\,440}{360}+\frac{1\,485}{360}$$

Aplicando a regra conhecida, teremos:

$$\left(\frac{315}{360}+\frac{64}{360}+\frac{1\,120}{360}+\frac{1\,485}{360}\right)-\left(\frac{1\,200}{360}+\frac{1\,440}{360}\right)=$$

$$\frac{2\,984}{360}-\frac{2\,640}{360}=\frac{344}{360}=\frac{86}{90}=\frac{43}{45}$$

Exercícios. Série XXXVI

Problemas sôbre frações ordinárias

1. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 7 horas e a segunda em 8 horas. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

Solução. Se a primeira torneira enche o tanque em 7 horas, em 1 hora encherá $\frac{1}{7}$ do tanque. Se a segunda enche o tanque em 8 horas, em 1 hora encherá $\frac{1}{7}$ do tanque. Logo, as duas, abertas simultâneamente, em 1 hora encherão $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ do tanque, isto é $\frac{8}{56}+\frac{7}{56}$ ou $\frac{15}{56}$ do tanque.

Ora, para encher $\frac{15}{56}$ do tanque, é necessário que as duas torneiras fiquem abertas durante 1 hora; para encher $\frac{1}{56}$ do tanque, será necessário então que fiquem abertas durante $\frac{1}{15}$ da hora; para encher os $\frac{56}{56}$ do tanque isto é, o tanque todo, será necessário que fiquem abertas durante $56 \times \frac{1}{15}$ da hora, isto é, durante $\frac{56}{15}$ da hora ou 3 horas e $\frac{11}{15}$ da hora. Mas, $\frac{11}{15}$ da hora é o mesmo que $\frac{11}{15}$ de 60 minutos, e $\frac{11}{15}$ de $60 = \frac{11}{15}\times\frac{60}{1} = 44$ minutos Portanto, o tanque ficará cheio em 3 horas e 44 minutos.

2. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 5 horas e a segunda o esvazia em 8 horas. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

Solução. Se a primeira torneira enche o tanque em 5 horas, em uma hora encherá $\frac{1}{5}$ do tanque. Se a segunda esvazia o tanque em 8 horas, em 1 hora esvaziará $\frac{1}{8}$ do tanque. Logo, as duas torneiras, correndo simultâneamente, em 1 hora encherão $\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$ do tanque, isto é, $\frac{8}{40}-\frac{5}{40}$ ou $\frac{3}{40}$ do tanque. Ora, para encher $\frac{3}{40}$ do tanque, é necessário que as duas torneiras fiquem abertas durante 1 hora; para encher apenas $\frac{1}{40}$ do tanque, é necessário então que fiquem abertas durante $\frac{1}{3}$ da hora; para encher os $\frac{40}{40}$ do tanque

isto é, o tanque todo, será necessário que fiquem abertas durante $40 \times \frac{1}{3}$ da hora, isto é, durante $\frac{40}{3}$ da hora ou 13 horas e $\frac{1}{3}$ da hora. Mas, $\frac{1}{3}$ da hora é o mesmo que $\frac{1}{3}$ de 60 minutos, e $\frac{1}{3}$ de $60 = \frac{1}{3} \times \frac{60}{1} = 20$ minutos. Portanto, o tanque ficará cheio em 13 horas e 20 minutos.

3. Sonando-se a um certo número os $\frac{3}{7}$ do mesmo número, resulta 490. Qual é o número?

Solução. O número pedido tem $\frac{7}{7}$. Logo, $\frac{7}{7}$ do número pedido, mais $\frac{3}{7}$ do mesmo número, isto é $\frac{10}{7}$ do número pedido, é igual a 490. Ora, se $\frac{10}{7}$ do número pedido eqüivalem a 490, então $\frac{1}{7}$ dêste número é a décima parte de 490, isto é, 49. E, se $\frac{1}{7}$ do número é 49, o número todo, que tem sete sétimos, é igual a 49×7, isto é, 343.

4. Subtraindo-se de um número dado os $\frac{5}{9}$ do mesmo número, restam 320. Qual é o número?

5. Qual é o número cujos $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{3}{4}$ é igual a 86?

6. Achar um número cujos $\frac{2}{3}$ dos $\frac{4}{5}$ eqüivalem a 176.

7. Um menino gastou $\frac{3}{8}$ do seu dinheiro em livros, $\frac{3}{7}$ do resto em doces, e ficou com Cr$ 18,00. Quanto tinha antes de fazer estas compras?

8. Descobrir uma fração equivalente a $\frac{2}{5}$ e cuja soma dos têrmos seja 49.

Solução. A fração $\frac{2}{5}$ é irredutível. Logo, para obter uma fração eqüivalente a $\frac{2}{5}$, é necessário multiplicar os dois têrmos desta, por um mesmo número. Mas o problema exige que a soma dos têrmos da fração eqüivalente seja 49. Então não podemos multiplicar os dois têrmos da fração $\frac{2}{5}$ por um número qualquer. Seja n o número pelo qual devemos multiplicar os dois têrmos da fração $\frac{2}{5}$, para que a soma dos têrmos da fração resultante seja 49. Teremos então $\frac{2}{5} = \frac{2n}{5n}$ e $2n + 5n = 49$. Mas, *duas vêzes o número n*, mais *cinco vêzes o número n*, isto é, *sete vêzes o número n*, é igual a 49. Portanto, se $7 \times n = 49$, então $n = 49 \div 7$, isto é, $n = 7$. E a fração eqüivalente a $\frac{2}{5}$, e cuja soma dos têrmos é 49, é $\frac{2 \times 7}{5 \times 7}$ ou $\frac{14}{35}$.

9. Descobrir duas frações cuja soma é $7\frac{1}{2}$ e cuja diferença é $3\frac{2}{5}$.(*)

(*) Para resolver os problemas 9 a 17, é necessário recordar os problemas 1 a 13, da série **X**.

10. Descobrir duas frações cuja soma é $\frac{3}{4}$ de $7\frac{2}{3}$ e cuja diferença é a têrça parte de $5\frac{2}{5}$.

11. Descobrir duas frações cuja soma é $9\frac{1}{4}$ e cujo quociente é 6.

12. Descobrir duas frações cuja soma é $15\frac{3}{4}$ e cujo quociente é $7\frac{1}{2}$.

13. Descobrir duas frações cuja diferença é $11\frac{5}{6}$ e cujo quociente é 8.

14. Descobrir duas frações cuja diferença é $12\frac{1}{2}$ e cujo quociente é $7\frac{1}{3}$.

15. Multiplicando-se uma certa fração por $5\frac{1}{2}$, a fração obtida é igual ao multiplicando aumentado de $11\frac{1}{2}$. Qual é a fração?

16. Calcular $37 \times \frac{1}{2} + 37 \times \frac{2}{3} + 37 \times \frac{3}{4}$ sem efetuar as multiplicações indicadas.

17. Calcular $48 \times \frac{5}{6} - 48 \times \frac{2}{9}$, sem efetuar as multiplicações indicadas.

18. Comprei 37 milheiros de tijolos por Cr$ 2 850,00. Quanto devo pagar por $\frac{11}{24}$ de 48 milheiros? (Evitar a primeira divisão)

19. Um tanque tem três torneiras. A primeira enche o tanque em 18 horas, a segunda em 24, e a terceira em 30. Abrindo-se as três torneiras e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

20. Um tanque tem três torneiras. A primeira enche o tanque em 25 horas e a segunda em 40 horas. Mas a terceira o esvazia em 60 horas. Abrindo-se as três torneiras e estando o tanque vazio, em quantas horas ficará cheio?

21. Dois operários constroem uma parede em 25 dias. Um dêles, trabalhando sòzinho, constrói a mesma parede em 36 dias. Pergunta-se em quantos dias o outro operário seria capaz de executar sòzinho a mesma tarefa.

22. Três operários constroem uma parede em 60 dias Dois dêles, trabalhando separadamente, constroem a mesma parede em 120 e 150 dias. Em quantos dias o 3.º poderia construir a mesma parede, se trabalhasse sòzinho?

23. Carlos tinha uma certa quantia. Gastou $\frac{1}{5}$ do seu dinheiro mas, em seguida, recebeu Cr$ 36,00, ficando então com o que tinha antes de fazer a sua despesa e mais $\frac{1}{7}$ do que tinha. Quanto tinha Carlos?

Solução. Se Carlos gastou $\frac{1}{5}$ do seu dinheiro, ficou com $\frac{4}{5}$. Mas, em seguida, recebeu Cr$ 36,00, ficando então com $\frac{8}{7}$ do que tinha. Logo,

$$\frac{4}{5} \text{ do dinheiro} + \text{Cr\$ } 36{,}00 = \frac{8}{7} \text{ do dinheiro} \quad \therefore$$

$$\frac{8}{7} \text{ do dinheiro} - \frac{4}{5} \text{ do dinheiro} = \text{Cr\$}36{,}00 \quad \therefore$$

$\frac{40}{35} - \frac{28}{35}$ do dinheiro = Cr\$ 36,00 $\therefore$ $\frac{12}{35}$ do dinheiro = Cr\$ 36,00 $\therefore$

$\frac{1}{35}$ do dinheiro = Cr\$ 3,00 $\therefore$ $\frac{35}{35}$ do dinheiro = Cr\$ 105,00

Resposta. Carlos tinha Cr\$ 105,00.

24. Um tanque tem três torneiras. A primeira despeja 7 litros e $\frac{3}{4}$ por minuto; a segunda, 8 litros e $\frac{2}{5}$ por minuto; a terceira, 10 litros e $\frac{3}{8}$ por minuto. A capacidade do tanque é de 4 000 litros. Abrindo-se as três torneiras ao mesmo tempo, em quantas horas o tanque ficará cheio?

25. Um tanque tem duas torneiras. A primeira enche o tanque em 15 horas e a segunda em 18 horas. Abrem-se as duas. Ao cabo de 5 horas fecha-se a segunda. Em quantas horas a primeira acabará de encher o tanque?

26. Se $\frac{7}{16}$ de uma casa custam Cr\$ 6 440,00, qual é o preço da casa?

27. Se $\frac{11}{52}$ de um exército eqüivalem a 36 718 soldados, de quantos soldados se compõe êste exército?

28. Paguei Cr\$ 48,00 pelos $\frac{15}{32}$ de uma saca de café. Qual é o preço da saca?

29. Um menino pagou Cr\$ 9,10 pelos $\frac{7}{15}$ de um livro. Qual o preço do livro?

30. Somando-se a um número, $\frac{4}{11}$ do mesmo número, o resultado é 195. Qual é o número?

31. Subtraindo-se de um número, $\frac{4}{15}$ do mesmo número, o resultado é 407. Qual é o número?

32. Somando-se a um número, $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ do mesmo número, o resultado é 210. Qual é o número?

33. Subtraindo-se de um número, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{9}$ do mesmo número, o resultado é 247. Qual é o número?

34. Um negociante tem uma peça de sêda que vende a Cr\$ 12,00 cada metro. Se a peça tivesse mais $\frac{4}{15}$ do seu comprimento, o valor dela seria Cr\$ 972,00. Quantos metros de comprimento tem a peça?

35. Três meninos repartiram entre si uma certa quantia. O primeiro recebeu $\frac{3}{10}$ da quantia mais Cr\$ 50,00; o segundo recebeu $\frac{4}{15}$ da quantia, mais Cr\$ 60,00; o terceiro recebeu Cr\$ 202,00. Calcular a quantia repartida e a parte de cada um dos três meninos.

36. Qual é o número que, dividido por $\frac{8}{15}$, aumenta de 560 unidades?

Solução. Dividir um número por $\frac{8}{15}$ é multiplicá-lo por $\frac{15}{8}$. Multiplicar um número por $\frac{15}{8}$ é tomar $\frac{15}{8}$ dêste número Tomar $\frac{15}{8}$ de um nú-

mero que tem sòmente $\frac{8}{8}$, é aumentá-lo de $\frac{7}{8}$ de seu valor Ora, desde que $\frac{7}{8}$ do número equivalem a 560 unidades, $\frac{1}{8}$ é $560 \div 7$, isto é, 80. E, sendo $\frac{1}{8}$ do número procurado igual a 80, êste número é 80×8, isto é, 640.

37. Qual é o número que, dividido por $\frac{11}{20}$, aumenta de 135 unidades?

38. Qual é o número que, dividido por $\frac{13}{30}$, aumenta de 1 360 unidades?

39. Qual é o número que, dividido por 15, diminui de 518 unidades?

40. Qual é o número que, dividido por $7\frac{2}{3}$, diminui de 160 unidades?

41. Um barril está cheio de vinho Tira-se do barril $\frac{1}{15}$ do vinho e enche-se novamente o barril com água. Em seguida, tira-se do barril $\frac{5}{18}$ do seu conteúdo e enche-se novamente o barril com água Restam no barril 728 litros de vinho puro. Qual é a capacidade do barril?

Solução. Tirando-se do barril $\frac{1}{15}$ do seu conteúdo, restaram $\frac{14}{15}$ de vinho. Depois encheu-se o barril com água. Em seguida, tiraram-se $\frac{5}{18}$ da mistura de vinho com água. Então tiraram-se $\frac{5}{18}$ do vinho que o barril continha, isto é, $\frac{5}{18}$ de $\frac{14}{15}$. Mas, tirando-se do barril $\frac{5}{18}$ dos $\frac{14}{15}$ de vinho, ficaram $\frac{13}{18}$ dos $\frac{14}{15}$ de vinho, isto é, $\frac{13}{18} \times \frac{14}{15}$ ou $\frac{13 \times 7}{9 \times 15}$ ou $\frac{91}{135}$ de vinho. Mas, $\frac{91}{135}$ do vinho eqüivalem a 728 litros; então $\frac{1}{135}$ do vinho eqüivale a $728 \div 91$, isto é, 8. E, desde que $\frac{1}{135}$ do vinho são 8 litros, a capacidade do barril é de 135×8, isto é, 1 080 litros.

42. Calcular uma fração eqüivalente a $\frac{3}{7}$ e cuja soma dos têrmos seja igual a 120.

43. Calcular uma fração eqüivalente a $\frac{21}{28}$ e cuja soma dos têrmos seja igual a 119.

44. Calcular uma fração eqüivalente a $\frac{7}{10}$ e cuja diferença dos têrmos seja igual a 69.

45. Calcular uma fração eqüivalente a $\frac{8}{15}$ e cuja diferença dos têrmos seja igual a 154.

46. Dois engenheiros estão medindo o comprimento de uma estrada de rodagem. O primeiro mede $\frac{13}{40}$ da estrada. Depois o segundo, continuando os trabalhos, mede $\frac{11}{12}$ do restante e acha 693 km. Qual é o comprimento de tôda a estrada?

47. Comprei sêda a Cr\$ 40,00 cada 7 metros, vendí-a a Cr\$ 50,00 cada 6 metros e ganhei Cr\$ 66,00. Quantos metros de sêda comprei?

48. A soma de dois números é 120, e o menor é igual a $\frac{3}{7}$ do maior. Quais são os dois números?

49. Que horas são, se $\frac{4}{11}$ do que resta do dia é igual ao tempo decorrido?

Solução. Suponhamos o dia dividido em 15 partes iguais, e que restam 11 destas partes. Então o tempo decorrido é $\frac{4}{11}$ de 11 partes, isto é, 4 partes.

Logo, decorreram 4 partes do dia e restam 11. Mas o dia está dividido em 15 partes. Então decorreram $\frac{4}{15}$ do dia e restam $\frac{11}{15}$ do dia. Mas o dia tem 24 horas. Então decorreram $\frac{4}{15}$ de 24 horas e restam $\frac{11}{15}$ de 24 horas.

Se já decorreram $\frac{4}{15}$ de 24 horas, são $\frac{4}{15} \times 24 = \frac{32}{5}$ da hora ou 6 horas e $\frac{2}{5}$ da hora. E $\frac{2}{5}$ da hora $= \frac{2}{5}$ de 60 minutos $= \frac{2}{5} \times 60 = 24$ minutos.

Resposta. São 6 horas e 24 minutos da manhã.

N. B. Se a fração dada no problema é, por exemplo, $\frac{5}{13}$, dividimos o dia em 18 partes iguais e supomos que restam 13 destas partes; se a fração dada é $\frac{12}{17}$, dividimos o dia em 29 partes iguais e supomos que restam 17 destas partes; e assim por diante.

50. Um aviador aterrou e, verificando que o tanque de gasolina continha sòmente $\frac{2}{15}$ da sua capacidade, comprou 370 litros de gasolina, enchendo assim $\frac{3}{4}$ do mesmo tanque. Qual é a capacidade do tanque?

51. $\frac{3}{4} + \frac{5}{7} \div \frac{15}{28} - \frac{2}{5}$ de $4\frac{1}{3} + 7 \times 2\frac{3}{10} =$

52. $\dfrac{7}{\frac{3}{5}} + \dfrac{\frac{5}{8}}{4} + \dfrac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{4}} + \dfrac{9}{10} =$

53. $\dfrac{1}{2 + \dfrac{3}{4 + \frac{5}{6}}} \div \dfrac{\dfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}{\dfrac{3}{1 \times \frac{1}{4}}}$

54. $\dfrac{3\frac{1}{3} + 2\frac{1}{6}}{3\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}} \div \dfrac{1\frac{1}{5} + 1\frac{3}{10}}{3\frac{3}{10} - 2\frac{1}{5}}$

55. $\frac{7}{8} + 2\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \div \frac{7}{12} + \frac{4}{8} \div \frac{8}{27} \times \frac{9}{10} + \frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{2} =$

56. Dadas as frações $\frac{11}{14}$, $\frac{16}{21}$, $\frac{51}{68}$ e $\frac{5\,915}{7\,644}$, dividí a menor pela maior e achei $\frac{21}{22}$. Estará certo? Verificar o resultado, efetuando as operações necessárias. (Escola Caetano de Campos, São Paulo)

Observação. É útil simplificar as frações dadas.

105. Frações decimais. Consideremos as frações $\frac{7}{16}$, $\frac{31}{100}$ e $\frac{429}{1\,000}$. São frações cujos denominadores são potências de 10. A estas frações dá-se o nome de *frações decimais. Fração decimal é a fração cujo denominador é uma potência qualquer de* 10.

Tracemos um segmento retilíneo AB e dividamo-lo em 10 *partes iguais;* cada uma destas partes será *um décimo de AB.* Dividamos cada décimo de AB em 10 *partes iguais;* o segmento AB ficará dividido em 100 *partes iguais,* e cada uma destas partes será *um centésimo* de AB. Dividamos cada centésimo de AB em 10 *partes iguais;* o segmento AB ficará dividido em 1 000 *partes iguais* e cada uma destas partes será *um milésimo* de AB. Considerando que o segmento AB pode representar uma unidade qualquer, e examinando com atenção as suas divisões e subdivisões, veremos que:

1 unidade = 10 décimos = 100 centésimos = 1 000 milésimos
1 décimo = 10 centésimos = 100 milésimos
1 centésimo = 10 milésimos

N. B. O professor desenhará no quadro-negro o segmento AB, com as divisões indicadas neste parágrafo. Mas, é preferível dar a cada aluno uma tira de papel milimetrado com 3 a 4 centímetros de largura, e na qual se tenha traçado o segmento AB, com um metro de comprimento.

Exercícios orais

1. Reduzir 1 unidade e 3 décimos a décimos.
2. Reduzir 4 décimos e 5 centésimos a centésimos.
3. Reduzir 3 unidades e 7 décimos a décimos.
4. Reduzir 5 unidades e 8 décimos a centésimos.
5. Reduzir 7 unidades, 4 décimos e 6 centésimos a centésimos.
6. Reduzir 8 décimos e 3 centésimos a centésimos.
7. Reduzir 4 décimos e 7 centésimos a milésimos.
8. Reduzir 3 unidades e 4 décimos a milésimos.
9. Reduzir 5 unidades e 8 centésimos a milésimos.
10. Reduzir 7 décimos e 9 milésimos a milésimos.

Seja a fração decimal $\frac{347}{1\,000}$. Esta fração contém 3 décimos, 4 centésimos e 7 milésimos porque

$$\frac{347}{1\,000} = \frac{300}{1\,000} + \frac{40}{1\,000} + \frac{7}{1\,000} = \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1\,000}$$

Já sabemos que 1 décimo tem 10 centésimos e 1 centésimo tem 10 milésimos. Portanto, se escrevermos 347, *e se houver um modo qualquer de lembrar que o algarismo* 3 *representa décimos,* então o algarismo 4 representará centésimos e o algarismo 7 representará milésimos, em virtude do princípio fundamental da numeração escrita. (§ 12) Ora, para que o algarismo 3 represente décimos, ecrever-se-á 0,347. *Por convenção, o primeiro algarismo à direita da vírgula representará sempre décimos.* Desde logo, o segundo algarismo à direita da vírgula representará *centésimos* e o terceiro, *milésimos.* E o algarismo *zero,* à esquerda da vírgula, representará a falta de unidades simples. (*)

Quando uma fração decimal, $\frac{347}{1\,000}$, é escrita sob a forma 0,347 dizemos, em Matemática, que a fração $\frac{347}{1\,000}$ *está escrita com a notação decimal,* e muitos autores lhe dão a denominação de *número decimal.* A parte situada à esquerda da vírgula é a *parte inteira,* e a que fica à direita é a *parte decimal,* sendo esta constituída de um ou mais *algarismos decimais.* (**)

Exercícios orais

Ler as frações decimais seguintes:

1. 0,3	**4.** 0,85	**7.** 0,497	**10.** 3,7	**13.** 4,25	**16.** 8,156
2. 2,74	**5.** 9,007	**8.** 6,04	**11.** 23,005	**14.** 8,123	**17.** 4,09
3. 4,367	**6.** 8,29	**9.** 15,038	**12.** 24,76	**15.** 1,01	**18.** 1,111

19. Quantas unidades contém cada uma destas frações?
20. Quantos décimos contém cada uma destas frações?
21. Quantos centésimos contém cada uma destas frações?
22. Quantos milésimos contém cada uma destas frações?

(*) Sendo facultativo empregar o ponto ou a vírgula nas frações decimais, julgamos preferível a vírgula, de acôrdo com um hábito já tradicional em nossas escolas.

(**) A maioria dos autores, referindo-se às frações decimais, diz indiferentemente *frações decimais, números decimais, frações decimais escritas com a notação decimal.* Achamos preferível dizer apenas **frações decimais**, para que os estudantes nunca se esqueçam de que os *números decimais* são **números fracionários**; é mais didático. Entretanto, os srs. professores darão a êstes números, o nome que acharem mais conveniente.

23. Ler estas frações, algarismo por algarismo; dada a fração 23,548 dizer: 2 dezenas, 3 unidades, 5 décimos, 4 centésimos e 8 milésimos.

24. Ler estas frações dizendo em primeiro lugar a parte inteira e depois a fracionária.

25. Ler estas frações reunindo a parte inteira com a parte fracionária. Por exemplo, dada a fração 35,08 dizer 3 508 centésimos.

26. Escrever estas frações no quadro-negro, sob ditado.

27. Escrever estas frações no quadro-negro, dando-lhes a forma de frações ordinárias.

106. Números inteiros e frações decimais. Consideremos o seguinte quadro:

1 dez. milhar	= 10 unid. milhar
1 unid. milhar	= 10 centenas
1 centena	= 10 dezenas
1 dezena	= 10 unidades
1 unidade	= 10 décimos
1 décimo	= 10 centésimos
1 centésimo	= 10 milésimos

A relação entre duas unidades consecutivas dêste quadro é sempre a mesma; é a conhecida relação decimal. Resulta daí que as leis da numeração, os processos para efetuar as operações fundamentais sôbre números inteiros, e as propriedades e teoremas relativos a estas operações se aplicam, como veremos, às frações decimais.

Observação. Não há uma diferença essencial entre as frações ordinárias e as decimais. O que as distingue umas das outras é que nas frações ordinárias, o denominador é um número qualquer, ao passo que, nas frações decimais, é uma potência de 10.

Convém também notar que nas frações ordinárias, o denominador é o número escrito por baixo do traço de fração. Nas frações decimais o denominador é a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos da parte decimal. Assim, dada a fração 0,56 o seu denominador é 100.

As frações ordinárias e decimais constituem o conjunto dos ***números fracionários,*** primeira ampliação do nosso campo numérico. (§ 102)

Exercícios orais

1. 57,38	**4.** 235,798	**7.** 123,446	**10.** 85,593
2. 529,057	**5.** 3,567	**8.** 618,3	**11.** 398,4
3. 36,4	**6.** 43,892	**9.** 59,07	**12.** 75,86

Fazer com estas frações, exercícios análogos aos precedentes. (§ 105)

107. As subdivisões do milésimo. O milésimo se divide em 10 partes iguais chamadas *décimos milésimos;* cada decimo-milésimo se divide em 10 partes iguais chamadas *centésimos-milésimos;* cada centésimo-milésimo se divide em 10 partes iguais chamadas *milionésimos.* Já vimos que:

as unidades simples. . são chamadas unidades de 1.ª ordem
as dezenas. . . . . são chamadas unidades de 2.ª ordem
as centenas. . . . . são chamadas unidades de 3.ª ordem
as unidades de milhar são chamadas unidades de 4.ª ordem
as dezenas de milhar. são chamadas unidades de 5.ª ordem
as centenas de milhar são chamadas unidades de 6.ª ordem

E assim por diante. Por analogia,

os décimos. . . . . são unidades fracionárias decimais de 1.ª ordem
os centésimos. . . . . são unidades fracionárias decimais de 2.ª ordem
os milésimos. . . . . são unidades fracionárias decimais de 3.ª ordem
os décimos-milésimos . . são unidades fracionárias decimais de 4.ª ordem
os centésimos-milésimos são unidades fracionárias decimais de 5.ª ordem
os milionésimos. . . . . . . são unidades fracionárias decimais de 6.ª ordem

Exercícios orais

1. 3,754 8	**4.** 24,958 76	**7.** 13,485 764	**10.** 4,235 768
2. 4,936 74	**5.** 8,343 537	**8.** 8,237 91	**11.** 8,137 926
3. 31,425 367	**6.** 15,897 2	**9.** 15,897 2	**12.** 23,574 8

Fazer com estas frações, exercícios análogos aos precedentes. (§ 106)

As frações decimais podem ser ***próprias, impróprias*** *e* ***aparentes.*** Assim, 0,35 é uma fração decimal própria; 8,35 é uma fração decimal imprópria; 7,00 é uma fração decimal aparente. (*)

108. Multiplicação ou divisão de uma fração decimal por 10^n. Uma fração decimal não se altera, se escrevermos à sua direita um ou dois ou mais zeros.

$$3{,}47 = 3{,}470 = 3{,}470\,0 = 3{,}470\,00 = 3{,}470\,000$$

Com efeito, desde que não se mude a posição da vírgula, o algarismo 3 representará sempre *unidades;* o 4, *décimos;* o 7, *centésimos.* Em poucas palavras, a *fração decimal não se altera porque o valor relativo de cada algarismo permanece invariável.*

Para multiplicar uma fração decimal por 10, 100, 1 000, etc., é bastante deslocar a vírgula, *para a direita,* um, dois, três, etc., algarismos. Por exemplo, $0{,}758 \times 10 = 7{,}58$.

Com efeito, a mudança de posição da vírgula faz com que o valor relativo de cada algarismo *fique multiplicado por* 10. Então tôda a fração decimal fica *multiplicada por* 10.

Anàlogamente, $0{,}007\,358 \times 100 = 0{,}735\,8$ e $0{,}978\,26 \times 1\,000 = 978{,}26$.

(*) É a moderna escola italiana.

Para dividir uma fração decimal por 10, 100, 1000, etc., é bastante deslocar a vírgula *para a esquerda*, um, dois, três, etc., algarismos.

$$0{,}789 \div 10 = 0{,}0789$$
$$2{,}4756 \div 100 = 0{,}024756$$
$$493{,}78 \div 1\,000 = 0{,}49378$$

Com efeito, a mudança de posição da vírgula faz com que o valor relativo de cada algarismo *fique dividido* por 10, 100, 1000, etc.. Então tôda a fração *fica dividida* por 10, 100, 1000, etc..

109. Adição e subtração de frações decimais. ***Regra.*** *Para somar duas ou mais frações decimais, escrevem-se estas frações, umas por baixo das outras, de modo que as vírgulas e as unidades de uma mesma ordem se correspondam em linhas verticais; depois efetua-se a adição como se se tratasse de números inteiros. Em seguida, coloca-se a vírgula na soma, por baixo das vírgulas das parcelas.*

Exemplo: $3{,}78 + 0{,}9426 + 53{,}57 + 0{,}896 + 54 = ?$

3,78	3,780 0
0,042 6	0,042 6
53,57	53,570 0
0,896	0,896 0
54	54,000 0
112,288 6	112,288 6

Na segunda adição, *igualámos o número de algarismos decimais das cinco parcelas. Não é necessário, mas é útil, e tudo o que aprendemos em relação à adição dos números inteiros, inclusive as diferentes maneiras de tirar a prova desta operação, se aplica, sem restrições, à adição das frações decimais.*

Regra. *Para subtrair uma fração decimal de outra, escreve-se a menor por baixo da maior, de modo que as vírgulas e as unidades de uma mesma ordem se correspondam em linhas verticais; depois efetua-se a subtração como se se tratasse de números inteiros. Em seguida, coloca-se a vírgula no resto, por baixo da vírgula do minuendo e do subtraendo.*

É sempre útil igualar o número de algarismos decimais. Tudo o que aprendemos em relação à subtração dos números inteiros, se aplica, sem restrições, à subtração das frações decimais.

$47{,}5 - 23{,}8976 = ?$

47,500 0
23,897 6
23,602 4

Exercícios orais

1. 4 + 3,5 =	**5.** 6 − 0,08 =	**9.** 3 − 1,5 =
2. 2 − 0,7 =	**6.** 0,1 − 0,01 =	**10.** 0,1 − 0,07 =
3. 0,08 + 3 =	**7.** 2 − 1,3 =	**11.** 4 − 0,8 =
4. 0,3 − 0,25 =	**8.** 0,7 − 0,07 =	**12.** 0,5 − 0,06 =

Exercícios. Série XXXVII

1. Na igualdade $3,27+x=8,003$ qual é o valor de x?
2. Na igualdade $8,5-x=3,749$ qual é o valor de x?
3. Na igualdade $7,48+3,059+0,0029+x=15,31$ qual é o valor de x?
4. Na igualdade $6,38 - x = 0,47 + 0,034\,6 + 0,006\,48 + 3$, qual é o valor de x?
5. $6,47 - 8,5 + 12 - 0,498 + 3,16 - 0,000\,88 =$
6. Quanto falta ao número 0,374 8 para completar uma unidade?
7. Quanto falta ao número 0,057 8 para completar uma dezena?

```
37,456×0,48 =
      37,456
        0,48
     -------
      299648
     149824
    --------
    17,97888
```

110. Multiplicação de frações decimais. ***Regra.*** *Para calcular o produto de duas frações decimais, efetua-se a multiplicação como se se tratasse de números inteiros, e depois separam-se no produto, a partir da direita, tantos algarismos decimais quantos são os algarismos decimais das duas frações dadas.*

Multiplicar 37,456 por 0,48 é o mesmo que multiplicar $\frac{37\,456}{1\,000}$ por $\frac{48}{100}$. Portanto,

$$37,456 \times 0,48 = \frac{374\,56}{1\,000} \times \frac{48}{100} = \frac{1\,797\,888}{100\,000} = 17,978\,88$$

111. Divisão de frações decimais. *Multiplicando-se ou dividindo-se o dividendo e o divisor por um mesmo número, o quociente não se altera,* ***mas o resto fica multiplicado ou dividido por êste número.*** *O resto é sempre da mesma espécie do dividendo.* (§37, *III*) ***Quando o dividendo e o divisor são quantidades heterogêneas, o quociente é da espécie do dividendo.*** (§34) Vamos insistir sôbre esta última verdade, resolvendo um problema muito simples.

Dividindo 435 laranjas por 13 meninos, quantas laranjas receberá cada um dêles?

```
435 laranjas | 13
 45          |-----------
  6 laranjas   33 laranjas
```

Efetuando-se a divisão, verifica-se que cada menino receberá *33 laranjas*, e restarão ainda *6 laranjas*. *Se, em lugar de dividir 435 laranjas,*

dividíssimos 435 maçãs, cada menino receberia *33 maçãs,* e restariam ainda *6 maçãs.* Se, em lugar de dividir *435 maçãs,* dividíssemos *435 fatias de bôlo,* cada menino receberia *33 fatias de bôlo,* e restariam ainda *6 fatias.*

E, se estas fatias fossem milésimos de bôlo? Cada menino receberia 33 milésimos de bôlo e restariam ainda 6 milésimos.

E, se estas fossem centésimos de bôlo? Cada menino receberia 33 centésimos de bôlo, e restariam ainda 6 centésimos.

Na divisão de frações decimais consideram-se dois casos.

```
37,592 68 | 43
 3 19       0,874 24
   182
    10 6
      2 08
0,000 36
```

Primeiro caso da divisão de frações decimais. Vamos dividir 37,592 68 por 43. Suprimindo mentalmente a vírgula e efetuando a divisão, obtemos o quociente 87 424 e o resto 36. Mas nós dividimos 37,592 68 ou *3 759 268 centésimos milésimos por 43. Logo, o quociente é 87 424 centésimos milésimos* e restam *36 centésimos milésimos.*

Regra. *Para dividir uma fração decimal por um número inteiro, efetua-se a divisão como se o dividendo fosse um número inteiro; em seguida, separam-se no quociente e no resto, a partir da direita, tantos algarismos decimais quantos são os do dividendo.*

Exemplos.

```
47,308 | 25          0,00274685 | 53
22 3     1,892              096   0,00005182
 2 30                       438
    58                      145
 0,008               0,00000039
```

```
73,489 26 ÷ 8,37
7 348,926 | 837
  652 9     8,780
   67 02
 0,00 066
```

Segundo caso da divisão de frações decimais. Vamos dividir 73,489 26 por 8,37. De acôrdo com o princípio demonstrado (§ 37), vamos multiplicar o dividendo e o divisor por um número inteiro, isto é, por 100. Resultará 7 348,926÷837. Recaímos, assim, no primeiro caso. Efetuada a divisão, obtemos o quociente 8,780 e o resto 0,066. Entretanto, o resto 0,066 *está multiplicado por* 100. (§ 37) Neste caso, o resto verdadeiro é 0,006÷100, isto é, 0,000 66.

Regra. *Para dividir uma fração decimal por outra, multiplicam-se as duas frações por uma potência de 10 tal que o divisor se torne um número inteiro. Em seguida, aplica-se a regra relativa ao primeiro caso da divisão. Mas o resto terá tantos algarismos decimais quantos são os do dividendo primitivo.*

Exemplos.

$37{,}948\,35 \div 0{,}074$

37948,35	74
094	512,81
208	
603	
115	
0,00041	

$0{,}003\,289 \div 4{,}36$

0,3289	436
0,000237	0,0007

Observando êstes dois exemplos com a devida atenção, podemos proceder, na prática, de acôrdo com os exemplos seguintes:

$0{,}079\,438\,5 \div 2{,}34 =$

0,0794385	2,34
0923	0,03394
2218	
1125	
0,0000189	

$3{,}475\,82 \div 0{,}075 =$

3,47582	0,075
475	46,34
258	
332	
0,00032	

$5{,}379\,862 \div 0{,}000\,624 =$

5,379862	0,000624
3878	8621
1346	
0982	
0,000358	

Portanto, para dividir uma fração decimal por outra, efetua-se a divisão como se as vírgulas não existissem; em seguida, *separam-se no quociente, a partir da direita, tantos algarismos decimais quantos são os do dividendo, menos os do divisor.*

Quanto ao resto, êste tem sempre tantos algarismos decimais quantos são os do dividendo.

Se tivermos de dividir 3,47 por 0,0658, acrescentaremos dois zeros à direita do dividendo. (§ 108)

Caso em que o divisor é um número inteiro seguido de zeros.

Para efetuar esta divisão dividem-se os dois números dados por 1 000. Em seguida, procede-se como no primeiro caso. Quanto ao resto verdadeiro, não é 0,003; é 0,003×1 000, isto é, 3.

$5\,748\,963 \div 7\,000 = ?$

$5\,748{,}963 \div 7 = ?$

5 748,963	7
14	821,280
08	
19	
56	
0,003	

Resto verdadeiro = 3

Exercícios. Série XXXVIII

1. Na igualdade $37 \times x = 179{,}672$ qual o valor de x?
2. Na igualdade $3{,}485 \times x = 80{,}155$ qual o valor de x?
3. Na igualdade $4{,}6 \times x = 38{,}5250$ qual o valor de x?
4. Sendo $7{,}619\,04 \div x = 2{,}34$ qual o valor de x?
5. $0{,}7 + 3{,}8 \times 0{,}92 - 9{,}1 \div 0{,}13 + 84{,}1 \times 2{,}5 =$
6. $14{,}4 \div 36 + 3{,}5 \times 6{,}2 - 0{,}78 \div 2{,}6 \times 0{,}9$ de $4{,}7 =$
7. Multiplicar 34,835 6 por 7,54 e tirar a prova com o divisor 9.
8. Multiplicar 416,372 por 3,94 e tirar a prova com o divisor 11.
9. Dividir 37,856 2 por 7,88 e tirar a prova com o divisor 9.
10. Dividir 197,324 1 por 15,87 e tirar a prova com o divisor 11.
11. Dividir 37,485 96 por 0,754. Qual é o resto verdadeiro?
12. Dividir 1 285 796 por 8 000. Qual é o resto verdadeiro?
13. Dividir 3,647 por 5,97. Qual é o resto verdadeiro?
14. Dividir 17 por 0,054 8. Qual é o resto verdadeiro?
15. Dividir 3,7 por 6 000. Qual é o resto verdadeiro?

112. Transformação de uma fração decimal em ordinária. É uma questão que não oferece a mínima dificuldade. Com efeito, 0,13 é o mesmo que $\frac{13}{100}$; 0,045 é o mesmo que $\frac{45}{1\,000}$. 4,7 ou 47 décimos é o mesmo que $\frac{47}{10}$; 36,48 ou 3 648 centésimos é o mesmo que $\frac{3\,648}{100}$. Podemos, pois, estabelecer a seguinte

Regra. *Para transformar uma fração decimal em ordinária, toma-se como numerador a fração decimal dada, suprimindo-se a vírgula, e como denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais da fração decimal dada.*

Exemplos. $0{,}715 = \frac{715}{1\,000} = \frac{143}{200}$

$0{,}075 = \frac{75}{1\,000} = \frac{3}{40}$

$4{,}36 = 4\frac{36}{100} = 4\frac{9}{25}$

$4{,}36 = \frac{436}{100} = 4\frac{36}{100} = 4\frac{9}{25}$

$8{,}125 = \frac{8\,125}{1\,000} = 8\frac{125}{1\,000} = 8\frac{1}{8}$

$8{,}125 = 8\frac{125}{1\,000} = 8\frac{1}{8}$

113. Transformação de uma fração ordinária em decimal. Uma fração ordinária é o quociente completo da divisão do numerador pelo denominador. (§ 102)

$$5 \div 8 = \frac{5}{8}; \; 4 \div 9 = \frac{4}{9}; \; 11 \div 13 = \frac{11}{13}, \text{ etc..}$$

Segue-se que, dada a fração $\frac{11}{37}$, se quisermos transformá-la em decimal, devemos dividir 11 por 37. Mas, como dividir 11 por 37? É evidente que $11 = 11{,}0 = 11{,}00 = 11{,}000$, etc..

$$\begin{array}{l|l}
11{,}000000 & 37 \\ \cline{2-2}
3\,60 & 0{,}297297 \\
\;\;270 & \\
\;\;\;110 & \\
\;\;\;\;360 & \\
\;\;\;\;\;270 & \\
0{,}000011 &
\end{array}$$

Portanto, para dividir 11 por 37, colocamos uma vírgula à direita de 11, em seguida a esta vírgula quantos zeros quisermos, e efetuamos a divisão. (§ 111)

Neste exemplo se observa que os seis zeros colocados à direita de 11, depois da vírgula, não foram suficientes para obtermos um quociente completo. Mas também se observa que, por maior que seja o número de zeros colocados à direita do dividendo, nunca chegaremos a um quociente completo; os algarismos 2, 9 e 7 do quociente se vão repetindo indefinidamente e sempre na mesma ordem. Logo,

$$\frac{11}{37} = 0{,}297\,297\,297\,297 \ldots$$

A estas frações decimais, constituídas por um algarismo (ou grupo de algarismos) que se repete indefinidamente, e sempre na mesma ordem, dá-se o nome de *dízimas periódicas;* delas trataremos em capítulo especial. (§ 116)

Vamos converter $\frac{7}{16}$ em fração decimal.

$$\begin{array}{l|l}
7{,}000000 & 16 \\ \cline{2-2}
\;\;60 & 0{,}4375 \\
\;\;120 & \\
\;\;\;080 & \\
\;\;\;\;\;0 &
\end{array}$$

Procedendo como no exemplo anterior, colocamos a vírgula à direita de 7 e, em seguida, alguns zeros, o que não altera o dividendo. Neste exemplo, porém, escrevemos zeros de mais; teria sido suficiente escrever 4 zeros.

E verificamos que $\frac{7}{16} = 0{,}437\,5$.

Exemplos. Converter $\frac{13}{32}$ em fração decimal.

```
13,00000 | 32
0 200     0,40625
  080
   160
    00
```

Resposta. $\frac{13}{32} = 0{,}406\,25$

Converter $\frac{9}{11}$ em fração decimal.

```
9,000000 | 11
20        0,818181
 90
  20
   90
    20
     9
```

Resposta. $\frac{9}{11} = 0{,}818\,181\ldots$

114. Divisão com resto. *Para obter o quociente completo da divisão de dois números, no caso em que o primeiro não seja divisível pelo segundo, é bastante juntar ao quociente uma fração ordinária, cujo denominador é o divisor e cujo numerador é o resto.* Por exemplo, se a divisão de 37 por 8 dá um quociente 4 e um resto 5, teremos: $37 \div 8 = 4\frac{5}{8}$; o quociente completo da divisão de 37 por 8 é $4\frac{5}{8}$.

Vejamos se é possível obter o quociente completo da divisão de dois números, mesmo que o primeiro não seja divisível pelo segundo, recorrendo às frações decimais, em lugar das ordinárias.

Vamos dividir 4 386 por 125. Nós sabemos que 4 386 não é divisível por 125. (§ 53)

```
4386,000000 | 125
 636          35,088
  11 00
    1 000
      000
```

À direita do número 4 386 colocamos a vírgula e, depois dela, alguns zeros. Em seguida, efetuamos a divisão. (§ 111) Neste exemplo notamos que não era necessário escrever seis zeros à direita do dividendo; bastariam três zeros. E o quociente completo da divisão de 4 386 por 125 é 35,088.

```
419,000000 | 37
049          11,324324
 12 0
  0 90
    160
     120
      090
       160
        12
```

Vamos dividir 419 por 37, procedendo como acima.

Neste exemplo, o quociente é uma dízima periódica; logo, não é possível obter, por meio de uma fração decimal,

o quociente completo da divisão de 419 por 37; o quociente 11,324 324 324 ... não é o quociente completo da divisão de 419 por 37 porque a divisão deixa sempre um resto.

Do que acabámos de dizer neste parágrafo, concluímos que:

I. É sempre possível completar o quociente de uma divisão, com uma fração ordinária.

II. Nem sempre é possível completar o quociente de uma divisão, com uma fração decimal.

Exercícios. Série XXXIX

Completar, pelos dois processos, os quocientes das divisões abaixo indicadas.

1. $3\,756 \div 125$	**3.** $1\,874 \div 625$	**5.** $1\,236 \div 74$
2. $379 \div 32$	**4.** $719 \div 88$	**6.** $256 \div 7$

7. Provar que, para obter o quociente completo da divisão de um número inteiro qualquer, por 2 ou por 5, é bastante juntar um zero ao dividendo.

8. Provar que, para obter o quociente completo da divisão de um número inteiro qualquer, por 4 ou 25, é bastante juntar dois zeros ao dividendo.

9. Provar que, para obter o quociente completo da divisão de um número inteiro qualquer, por 8 ou por 125, é bastante juntar três zeros ao dividendo.

115. Quociente aproximado a menos de uma unidade. Se dividirmos 41 por 9, obteremos o quociente incompleto 4 e o resto 5. Logo, 4 não é o *quociente exato* da divisão de 41 por 9. Será, talvez, um *quociente errado?* Também não. Então que quociente é? É o que se chama em Aritmética um *quociente incompleto* ou *aproximado*.

Se dissermos que 4 é o *quociente completo* da divisão de 41 por 9, não diremos uma verdade; *alguma cousa* falta ao número 4, para ser o quociente completo de 41 dividido por 9; mas esta *alguma cousa não atinge a uma unidade*, porque o quociente completo de 41 dividido por 9 não pode ser igual a 5 ou superior a 5.

Se dissermos que 5 é o *quociente completo* da divisão de 41 por 9, não diremos uma verdade; *alguma cousa* há de mais no número 5, para ser o quociente completo de 41 dividido por 9; mas esta *alguma cousa não atinge a uma unidade*, porque o quociente completo de 41 dividido por 9 não pode ser igual a 4 ou inferior a 4.

Donde concluímos que, dividindo 41 por 9, obtemos dois quocientes, nenhum dos quais é completo; ambos se aproximam do quociente completo, *faltando ao primeiro menos de uma unidade e sobrando no segundo menos de uma unidade;* o quociente menor chama-se *quociente aproximado a menos de uma unidade*, ***por falta;*** o quociente maior chama-se *quociente aproximado a menos de uma unidade*, ***por excesso.***

$$\begin{array}{r|l} 3\,750 & 9 \\ \cline{2-2} 15 & 416 \\ 60 & \\ 6 & \end{array}$$

Exemplo: $3\,750 \div 9 = ?$

$3\,750 \div 9 = 416$ (quociente aproximado a menos de uma unidade, por falta).

$3\,750 \div 9 = 417$ (quociente aproximado a menos de uma unidade, por excesso).

Exercícios. Série XL

Problemas sôbre frações decimais

1. Separar os algarismos do número 3,745 862 em classes de dois algarismos da direita para a esquerda e, em seguida, ler o número assim preparado, classe por classe.

Solução. 3 unidades simples, 74 centésimos, 58 décimos milésimos e 62 milionésimos.

2. Mesmo exercício com o número 378,495 6.

3. Multiplicar o número 347 por 10; multiplicar o número 3,47 por 10.

4. Multiplicar o número 7 358 por 1 000; multiplicar o número 0,735 8 por 1 000.

5. Dividir o número 3 748 por 10, por 100 por 1 000, por 10 000, etc..

6. Provar que, para multiplicar uma fração decimal por 0,1 ou 0,01 ou 0,001 é bastante deslocar a vírgula para a esquerda, um ou dois ou três algarismos. *Exemplo.* $37{,}8 \times 0{,}1 = 3{,}78$.

7. Provar que, para dividir uma fração decimal por 0,1 ou 0,01 ou 0,001 é bastante deslocar a vírgula para a direita, um ou dois ou três algarismos. *Exemplo.* $3{,}789 \div 0{,}1 = 37{,}89$.

8. Para dividir 38 700 por 400, podemos suprimir os dois zeros que se acham à direita de cada um dos dois números dados. E se quisermos dividir 47,589 por 3 700, podemos suprimir os dois zeros que se acham à direita do divisor? Qual será a modificação que devemos fazer no dividendo?

9. Um menino distraído, ao dividir 37,480 por 540, suprimiu os dois zeros e dividiu 37,48 por 54. Êste menino acertou ou errou? Por que?

10. Pode-se efetuar uma divisão, quando o dividendo é menor do que o divisor? Como dividir 13 por 40?

11. $$\frac{7{,}3 + \dfrac{3{,}4}{2 - 1{,}5} \times \dfrac{2 + 3{,}4 \div 17}{0{,}02}}{3{,}995 - 0{,}4 \times 5 + 0{,}05 \times 0{,}1} + 5 \times 4{,}47 =$$

Esta expressão aritmética foi tirada da excelente coleção de exercícios de H. Costa — E. Roxo — O. Castro. Seu valor é 400. Para calculá-la, é bastante seguir os preceitos determinados no parágrafo 40 e as regras relativas às quatro operações sôbre frações decimais e ordinárias.

12. Por que número é necessário multiplicar 325 para que o produto tenha 45 unidades menos que o multiplicando?

13. Por que número é necessário multiplicar 5,74 para que êste número aumente de 63,14?

14. Qual é o número cujos 0,36 são 147,6?

Sugestão. Seja x o número pedido. Então 0,36 de $x = 147{,}6$ ou $0{,}36 \times x = 147{,}6$.

15. Por que número é preciso dividir 720 para que o quociente tenha 5 280 unidades mais que o dividendo?

16. Por que número é necessário dividir 2,52 para que êste número aumente de 37,48?

17. Por que número é necessário dividir 0,231 para que êste número diminua de 0,176?

18. Não sendo 37 divisível por 45, calcular o quociente da divisão de 37 por 45, com três algarismos decimais.

Solução. $37 \div 45 = 37{,}000 \div 45 = 0{,}822$.

19. Calcular o quociente da divisão de 7 por 123 com quatro algarismos decimais.

20. Calcular o quociente da divisão de 3,7 por 0,72 com três algarismos decimais.

21. Calcular o quociente da divisão de 0,007 por 4,78 com quatro algarismos decimais.

22. Calcular dois números tendo por soma 741 e por diferença 256.

23. Calcular dois números tendo por soma 2,76 e por diferença 0,573.

24. O triplo da soma de dois números é 2,58; o quádruplo da diferença é 1,37. Calcular os dois números.

25. Calcular dois números tais que 0,8 da sua soma seja igual a 2,776 e 0,7 da sua diferença seja igual a 0,440 3.

26. Dividir 3,758 em duas partes cuja diferença seja igual ao quádruplo da quinta parte de 0,37.

27. Comprei um automóvel por Cr$ 17 200,00. Algum tempo depois vendí-o com prejuízo de 15% sôbre o custo. Quanto perdí?

Observação. O símbolo 15% se lê ***15 por cento*** e significa 0,15. Portanto, ganhar ou perder 15% sôbre um objeto que se vende, quer dizer: *ganhar ou perder **0,15** do custo dêsse mesmo objeto.*

Sugestão. O prejuízo foi de 15%, isto é, de 0,15 do valor do automóvel; logo, perdí Cr$ 17 200,00 × 0,15.

28. Um negociante comprou mercadorias no valor de Cr$ 8 749,00 e vendeu-as com 24% de lucro. Quanto ganhou?

Sugestão. Ganhou 0,24 da quantia que êle despendeu, isto é, Cr$ 8 749,00 × 0,24.

29. Comprei uma casa por Cr$ 74 500,00 e tornei a vendê-la com 14% de lucro. Quanto recebí?

30. Um negociante comprou 328 metros de brim por Cr$ 6 590,00 e vendeu-os com 18% de prejuízo. Quanto recebeu?

31. Suponhamos que o brim, ficando dentro d'água durante 24 horas, perde 0,03 do seu comprimento. Um alfaiate compra 78 metros de brim e submete esta fazenda a um banho de 24 horas. A quanto se reduz o comprimento da peça, depois do banho?

32. Supondo que um fio de ferro, submetido a uma temperatura de 100°, aumente de 0,003 do seu comprimento, qual será o comprimento de um fio com 348 metros, submetido àquela temperatura?

33. Uma peça de brim, depois de um banho de 24 horas, tem 54,6m de comprimento. Sabendo-se que o brim perdeu 0,03 do seu comprimento durante o banho, qual era o comprimento da peça antes de ser molhada?

Sugestão. Se a peça perdeu 0,03 do seu comprimento primitivo, então conservou 0,97 dêste mesmo comprimento. Chamando x a êste comprimento teremos: $x \times 0,97 = 54,6$ etc..

34. Um fio de arame a 100°, está medindo 54,9m. Sabendo-se que o comprimento dêste fio aumentou de 0,003 ao passar de 0° para 100°, pergunta-se qual é o comprimento do fio a zero graus.

35. Mediu-se o perímetro de um terreno e achou-se 597 metros. Verificou-se depois que a corrente que serviu para a medição está errada; tem 3 milímetros mais que o metro legal. Qual é o verdadeiro perímetro do terreno?

Sugestão. Três milímetros são 0,003 do metro. Se cada metro medido corresponde, na realidade, a 1,003m, o perímetro verdadeiro é 597 × 1,003m.

Regra. *Para corrigir uma medida, quando a unidade de comprimento está errada* ***para mais,*** *multiplica-se a medida pela* ***soma*** *da unidade de comprimento com o êrro.*

Exemplo. Mediu-se o comprimento de um corredor, com uma régua de um metro e achou-se 74,8m. Mas a régua é defeituosa; tem 4 milímetros mais do que o metro legal. Qual o comprimento exato do corredor?

Sugestão. 74,8m × (1 + 0,004) = 74,8 × 1,004.

36. Mediu-se o perímetro de um terreno e achou-se 2 374 metros. Verificou-se depois que a corrente que serviu para a medição está errada; tem 3 milímetros menos que o metro legal. Qual é o verdadeiro perímetro do terreno?

Se cada metro medido corresponde, na realidade, a 0,997m, o perímetro verdadeiro é 0,997m × 2 374.

Regra. *Para corrigir uma medida, quando a unidade de comprimento está errada* ***para menos,*** *multiplica-se a medida pelo excesso da unidade de comprimento sôbre o êrro.*

Exemplo. Mediu-se o comprimento de uma peça de sêda, com um fita de um metro, e achou-se 47,6m. Mas a fita é defeituosa; tem 4 milímetros menos que o metro legal. Qual é o comprimento exato da peça?

Sugestão. 57,6m × (1 – 0,004) = 47,6m × 0,996.

37. Uma tropa de 3 740 soldados entrou em combate e perdeu 540 homens. Qual foi a taxa de porcentagem dos mortos?

Solução. *Taxa de porcentagem* significa *tantos por cento*. Se a tropa tem 3 740 homens, cada homem é $\frac{1}{3\,740}$ da tropa e os 540 mortos representam $\frac{540}{3\,740}$ ou $\frac{54}{374}$ ou $\frac{27}{187}$ da tropa. Convertendo a fração $\frac{27}{187}$ em fração decimal e calculando o quociente apenas com dois algarismos decimais, acharemos 0,14. *Se um centésimo é a mesma coisa que um por cento*, então $0,14 = 14\,\%$.

Resposta. A taxa de porcentagem dos mortos é 14%.

38. Em um colégio entraram em exame 275 alunos e foram aprovados
253. Calcular a taxa de porcentagem de reprovação.

39. Em um colégio entraram em exame 315 alunos e foram reprovados
63. Calcular a taxa de porcentagem de aprovação.

40. Em um colégio foram aprovados 84% dos alunos inscritos, num total de 231 alunos. Quantos alunos entraram em exame?

41. $\dfrac{3,7 - \dfrac{0,15}{0,45}}{\dfrac{21,4}{40}} + \dfrac{5}{6} \text{ de } \dfrac{18,2}{26} =$

42. $\dfrac{\dfrac{3,5}{0,07} - 0,3 \text{ de } 24}{171,2} - \dfrac{3}{20} =$

43. Um negociante comprou 500 dúzias de pratos a Cr$ 6,40 a dúzia. Quebrou 84 pratos e vendeu os restantes a Cr$ 0,84 cada um. Calcular a taxa de porcentagem do lucro.

44. Comprei uma casa por Cr$ 80 000,00 e vendí-a por Cr$ 56 000,00. Calcular a taxa de porcentagen do prejuízo.

45. Quanto é $7\frac{1}{4}\%$ de 3 548?

46. Quanto é $\frac{3}{5}\%$ de 48 000?

47. Vendí um automóvel por Cr$ 9 200,00 e ganhei 15% da quantia que o automóvel me custou. Calcular esta quantia.

48. Em uma cidade há 44 000 homens. As mulheres representam 56% da população desta cidade. Calcular a população desta cidade.

116. Dízimas periódicas. Muitas vêzes, ao converter uma fração ordinária em decimal, resulta uma fração decimal constituída por um algarismo (ou por um grupo de algarismos) que se repete indefinidamente e sempre na mesma ordem. (§ 113)

Dízimas periódicas são frações decimais constituídas por um algarismo (ou grupo de algarismos) que se repete indefinidamente e sempre na mesma ordem.

0,777 777........
0,242 424 2.......
3,451 451 45......
0,078 078 07......
4,433 333 3.......
2,272 828 828 28..
0,523 347 347 3...
0,008 888 8 ......

Período de uma dízima periódica é o algarismo (ou grupo de algarismos) que se repete indefinidamente e sempre na mesma ordem.

Consideremos as dízimas periódicas ao lado. Na primeira, o período é 7; na segunda é 24; na terceira é 451; na quarta é 078; na quinta é 3; na sexta é 28; na sétima é 347; na oitava é 8. Alguns autores marcam de um modo evpecial o *período* que constitui a *dízima periódica;* nós preferimos deixar aos estudantes o prazer de verificarem qual é o período.

Algumas vêzes, o primeiro período fica situado logo depois da vírgula; é o que acontece nos quatro primeiros exemplos. Outras vêzes aparece, entre a vírgula e o primeiro período, um algarismo ou um grupo de algarismos, que não se repete, e que se denomina *parte não periódica;* é o que acontece nos quatro últimos exemplos. Dêste fato resulta a classificação das dízimas periódicas em dois grupos: *dízimas periódicas simples* e *dízimas periódicas compostas.*

Dízima periódica simples é a dízima na qual o primeiro período fica situado logo depois da vírgula. Os nossos quatro primeiros exemplos são dízimas periódicas simples.

Dízima periódica composta é a dízima na qual, entre a vírgula e o primeiro período, há um algarismo ou um grupo de algarismos, que não se repete e que se denomina parte não periódica. Os últimos quatro exemplos são dízimas periódicas compostas. Na quinta a parte não periódica é 4; na sexta é 27; na sétima é 523; na oitava é 00.

117. Valor absoluto e relativo de um período. Um período tem dois valores: *valor absoluto* ou *nominal* e *valor relativo* ou *local.* Valor absoluto de um período é o seu valor quando está isolado, separado da dízima à qual pertence. Valor relativo de um período é o seu valor quando reünido com os outros períodos, constituindo a dízima periódica.

Consideremos a dízima periódica seguinte: 0,777 77 ...... Nesta dízima o período é 7, e o valor absoluto dêste período é 7. Mas o valor relativo dêste período não é 7; varia de acôrdo com a sua posição à direita da vírgula. Assim é que o valor do

primeiro período é $\frac{7}{10}$; o do segundo é $\frac{7}{100}$; o do terceiro é $\frac{7}{1\,000}$; o do quarto é $\frac{7}{10\,000}$, etc.. Ora, sendo $\frac{7}{10} > \frac{7}{100} > \frac{7}{1\,000} > \frac{7}{10\,000}$, etc.. conclui-se imediatamente que o valor relativo de cada período vai diminuindo sucessivamente, à medida que o número de períodos vai aumentando. Logo, voltando à dízima 0,7777..., se tomarmos um número de períodos bastante grande, infinitamente grande, o valor relativo do último período tornar-se-á tão pequeno, tão insignificante, que se poderá considerar *nulo*, isto é, igual a zero.

Exercícios orais

Classificar as dízimas que se seguem, dizer qual é o período de cada uma delas, qual a parte não periódica e qual o valor relativo de cada um dos períodos.

1. 0,333...
2. 4,151 515...
3. 0,877 77...
4. 9,081 818...
5. 6,042 742 74...
6. 3,859 999 ...
7. 0,314 031 403...
8. 0,523 232 32...
9. 7,423 383 83...
10. 6,070 707 0...
11. 0,051 051 05...
12. 0,284 848 48...

118. Geratriz de uma dízima periódica. As dízimas periódicas se originam da transformação de uma fração ordinária em decimal. Surge, então, em Aritmética, êste problema interessante: dada uma dízima periódica, descobrir a fração ordinária que lhe deu origem. Seja a dízima periódica ... 0,363 636 3... Qual foi a fração ordinária que, ao ser transformada em decimal, deu origem a esta dízima?

Chama-se geratriz de uma dízima periódica, a fração ordinária que, ao ser transformada em decimal, dá origem a esta dízima.

Quando a dízima periódica é simples, descobrimos a sua geratriz de acôrdo com a seguinte

Regra. *A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração ordinária cujo numerador é um dos períodos, tomado em valor absoluto, e cujo denominador é um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período.*

Exemplo. Qual é a geratriz de 0,727 272......?

Resposta. A geratriz de 0,727 272...... é $\frac{72}{99}$ ou $\frac{8}{11}$.

Se a dízima periódica é composta, sua geratriz será determinada de acôrdo com a seguinte

Regra. *A geratriz de uma dízima periódica composta é uma fração ordinária cujo numerador é a parte não periódica seguida de um período, menos a parte não periódica; cujo denominador é um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período, seguido de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.*

Exemplo. Qual é a geratriz de 0,743 33......?

Resposta. A geratriz de 0,743 33... é $\frac{743-74}{900}$ ou $\frac{669}{900}$ ou $\frac{223}{300}$.

Exercícios. Série XLI

Descobrir a geratriz das dízimas periódicas seguintes:

1. 0,454 545...	**6.** 0,527 272 72...	**11.** 4,555 5...
2. 6,272 727 27...	**7.** 2,045 454 54...	**12.** 7,723 333 3...
3. 3,090 909 0...	**8.** 3,418 888...	**13.** 6,006 666...
4. 0,513 513 513...	**9.** 6,436 363 63...	**14.** 2,188 888...
5. 0,030 603 060...	**10.** 0,123 232 32...	**15.** 0,999 999 9...

119. O verdadeiro valor de uma dízima periódica. Seja a dízima periódica 0,444......

Sua geratriz é $\frac{4}{9}$. Podemos então escrever $\frac{4}{9}=0{,}444....$ Entretanto, é preciso compreender bem esta igualdade. A fração $\frac{4}{9}$ não é igual a 0,444. A fração $\frac{4}{9}$ é igual à soma de um número infinito de frações decimais cujo numerador é 4 e cujo denominador é 10 para a primeira, 10^2 para a segunda, 10^3 para a terceira, 10^4 para a quarta, e assim por diante. Portanto,

$$\frac{4}{9}=\frac{4}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{4}{10^5}+\frac{4}{10^6}+\ldots\ldots$$

Compreende-se perfeitamente que é impossível escrever todo o segundo membro desta igualdade, visto que êle é constituído por um número infinito de frações. Entretanto, a soma de tôdas estas frações, nós a conhecemos: é $\frac{4}{9}$; é a geratriz da dízima.

120. Operações sôbre as dízimas periódicas. As dízimas periódicas podem ser somadas, subtraídas, multiplicadas ou divididas; pode-se calcular uma potência qualquer de uma dízima periódica, assim como a raiz quadrada, etc., etc.. Mas, recordando o que dissemos no § anterior, *quando se realizam opera-*

ções sôbre dízimas periódicas, é necessário, em primeiro lugar, substituí-las pelas suas respectivas geratrizes. E a expressão dada fica então substituída por uma expressão constituída de frações ordinárias, e que já aprendemos a calcular.

Exercícios. Série XLII

1. $0,333\ldots. + 0,454\,54\ldots. + 2,818\,18\ldots. + 3,555\ldots. =$
2. $7,45454\ldots. - 5,222\,2\ldots. + 0,234\,234\,2\ldots. =$
3. $3,727\,272\ldots. \times 0,666\ldots. \div \frac{5}{11} =$
4. $2,171\,717\ldots. \div 3,414\,14\ldots. \times 5\frac{1}{2} =$
5. $0,433\,3\ldots. + 1,022\,2\ldots. + 0,888\ldots. + 0,325\,55\ldots. =$
6. $8,311\,11\ldots. + 2,577\,77\ldots. + 4,038\,88\ldots. =$
7. $5,612\,222\ldots. \times \frac{9}{10} - 0,007\,272\,7\ldots. \times \frac{45}{75} =$
8. $6,833\,3\ldots. \div \frac{6}{5} + 2,077\,7\ldots. \div \frac{7}{25} + \frac{2}{3}$ de $5\frac{1}{2} =$
9. $0,444\ldots. + \frac{0,777\ldots.}{0,888\ldots.} + 0,533\,3\ldots. + \frac{0,102\,02\ldots.}{0,510\,101\ldots.}$
10. $\frac{8,333\,33\ldots.}{9,151\,515\ldots.} \times \frac{302}{7} \times 0,777\ldots. \times \frac{1}{2}$ de $0,555\,5\ldots. =$

121. Caracteres de convertibilidade. Chamam-se caracteres de convertibilidade, certas leis que nos permitem dizer antecipadamente se uma fração ordinária, ao ser convertida em decimal, produz ou não produz uma dízima periódica.

Primeiro caracter. *Se o denominador de uma fração ordinária irredutível contém sòmente o fator 2, esta fração, ao ser convertida em decimal, produz uma fração decimal exata cujo número de algarismos é igual ao expoente do fator 2.*

Seja a fração $\frac{3}{8}$. Seu denominador é a terceira potência de 2. Portanto, $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}$. Multiplicando-se ambos os têrmos desta fração por 5^3, a fração não se altera. Logo,

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3\times5^3}{2^3\times5^3} = \frac{3\times125}{10^3} = \frac{375}{1\,000} = 0,375$$

Anàlogamente, $\frac{7}{16} = \frac{7}{2^4} = \frac{7\times5^4}{2^4\times5^4} = \frac{7\times625}{10^4} = \frac{4\,375}{10\,000} = 0,437\,5$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3\times 5^2}{2^2\times 5^2} = \frac{3\times 25}{10^2} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Segundo caracter. *Se o denominador de uma fração ordinária irredutível contém sòmente o fator 5, esta fração, ao ser convertida em decimal, produz uma fração decimal exata, cujo número de algarismos é igual ao expoente do fator 5.*

Seja a fração $\frac{11}{25}$. Seu denominador é a segunda potência de 5. Portanto, $\frac{11}{25} = \frac{11}{5^2}$. Multiplicando-se ambos os têrmos desta fração por 2^2, a fração não se altera. Logo,

$$\frac{11}{25} = \frac{11}{5^2} = \frac{11\times 2^2}{5^2\times 2^2} = \frac{11\times 4}{10^2} = \frac{44}{100} = 0{,}44$$

Anàlogamente, $\frac{31}{125} = \frac{31}{5^3} = \frac{31\times 2^3}{5^3\times 2^3} = \frac{31\times 8}{10^3} = \frac{248}{1\,000} = 0{,}248$

$$\frac{4}{5} = \frac{4\times 2}{5\times 2} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

Terceiro caracter. *Se o denominador de uma fração ordinária irredutível contém sòmente os fatôres primos 2 e 5, esta fração, ao ser convertida em fração decimal, produz uma fração decimal exata, cujo número de algarismos é igual ao maior expoente dêsses fatôres 2 e 5.*

Seja a fração $\frac{7}{20}$. Seu denominador é igual a $2^2\times 5$. Portanto, $\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2\times 5}$. Multiplicando-se ambos os têrmos desta fração por 5, a fração não se altera. Logo,

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2\times 5} = \frac{7\times 5}{2^2\times 5\times 5} = \frac{7\times 5}{2^2\times 5^2} = \frac{35}{10^2} = \frac{35}{100} = 0{,}35$$

Anàlogamente,

$$\frac{31}{40} = \frac{31}{2^3\times 5} = \frac{31\times 5^2}{2^3\times 5\times 5^3} = \frac{31\times 25}{2^3\times 5^3} = \frac{775}{10^3} = \frac{775}{1\,000} = 0{,}775$$

$$\frac{101}{250} = \frac{101}{2\times 5^3} = \frac{101\times 2^2}{2\times 5^3\times 2^2} = \frac{101\times 4}{2^3\times 5^3} = \frac{404}{10^3} = \frac{404}{1\,000} = 0{,}404$$

Quarto caracter. *Se o denominador de uma fração ordinária irredutível contém fatôres primos diferentes de 2 ou de 5, esta fração, ao ser convertida em decimal, produz uma dízima periódica.*

Seja a fração ordinária e irredutível $\frac{5}{14}$. Vamos provar que, se convertermos esta fração em decimal, obteremos uma dízima periódica. Para converter $\frac{5}{14}$ em fração decimal, é necessário dividir 5 por 14. (§ 113) E para dividir 5 por 14, é necessário escrever à direita do 5, tantos zeros quantos quisermos; um ou dois ou três ou quatro zeros, etc.. Mas, escrever um zero à direita de 5 é multiplicar 5 por 10; escrever dois zeros é multiplicar 5 por 100 ou 10^2; escrever três zeros é multiplicar 5 por 1 000 ou 10^3, etc.. Logo,

$$5 \times 10 = 5 \times 2 \times 5 = 5 \times 2 \times 5$$
$$5 \times 10^2 = 5 \times 2^2 \times 5^2 = 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$$
$$5 \times 10^3 = 5 \times 2^3 \times 5^3 = 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$$
$$5 \times 10^4 = 5 \times 2^4 \times 5^4 = 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$$

E assim por diante.

Ora, se observarmos com atenção êste quadro, concluiremos imediatamente que, por maior que seja o número de zeros escritos à direita do 5, o número assim formdo não conterá nunca o fator 7 do número 14, e por conseqüência, nunca será divisível por 14. (§ 51,V) Logo, a divisão se continua indefinidamente, e o quociente é uma fração decimal com um número ilimitado de algarismos. Resta provar que esta fração é uma dízima periódica.

50000000	14
80	0,357 142 85. . .
100	
20	
60	
40	1501
120	
80	
10	

O divisor é 14 e, sendo o resto sempre menor do que o divisor, segue-se que, na divisão de 5 por 14, podemos obter, no máximo, 13 restos diferentes. Forçosamente, depois de 13 divisões, no máximo, reaparece um dos restos já obtidos e começa então a repetição periódica dos algarismos do quociente.

No nosso exemplo temos 6 restos diferentes: 8, 10 2, 6, 4 e 12. Efetuando a sétma divisão parcial, reaparece o resto 8 e começa a repetição dos algarismos do quociente.

N. B. Há outros caracteres de convertibilidade cuja demonstração não pode ser dada num livro elementar; mesmo tôda a teoria contida neste parágrafo pode ser suprimida, se os srs. professores assim o julgarem conveniente.

CAPÍTULO IV

Sistema Legal de Unidades de Medir

122. Medição direta ou indireta de uma grandeza. Para medir uma grandeza temos de compará-la com outra da mesma espécie, tomada como unidade. *Esta comparação, porém, pode ser feita de um modo **direto ou indireto**.*

Queremos medir o comprimento de uma sala de aula. Tomamos o metro e verificamos quantas vêzes êle está contido no comprimento da sala. E ficamos sabendo que a sala de aula tem, por exemplo, 12 metros de comprimento. O comprimento da sala foi obtido de um modo direto, isto é, aplicando-se a grandeza unidade sôbre o comprimento da sala, tantas vêzes quantas foi possível.

Um segmento retilíneo é medido diretamente.

*E o número resultante é chamado **comprimento** do segmento retilíneo.*

A grandeza de um ângulo também pode ser medida diretamente. Fazemos coincidir o ângulo dado com um ângulo igual do transferidor e verificamos que o ângulo dado mede, por exemplo, 48 graus.

Um ângulo é, em geral, medido diretamente.

*E o número resultante é chamado **amplitude** do ângulo.*

A ***massa de um corpo, imprópriamente chamada pêso,*** (§155) é uma grandeza que também se mede, em geral, de um modo direto.

O mesmo acontece com o ***tempo***. É também uma grandeza que se avalia diretamente, com o auxílio de um cronômetro.

Vejamos agora em que consiste a medição indireta de uma grandeza. O exemplo mais simples, e que vamos apresentar neste parágrafo, é o da medição de uma certa porção de superfície plana e limitada, com a forma de um retângulo ou de um quadrado.

Suponhamos que dois meninos, Carlos e Raul, estão discutindo a respeito da superfície de dois terrenos retangulares, dos quais são os respectivos possuidores. Não chegando a um acôrdo, procuram seu professor para que êste decida a questão. O professor lhes diz que é necessário ***que meçam a superfície de seus terrenos,*** para que se possa dizer qual é o maior. Mas os meninos respondem que não sabem medir uma superfície. Então o professor explica-lhes que ***medir uma superfície limitada consiste em verificar quantas vêzes esta superfície contém outra superfície também limitada, conhecida e tomada como unidade.***

Alguns dias depois voltam os dois meninos com o resultado de seus trabalhos. Diz Carlos que a superfície de seu terreno contém 240 vêzes a superfície de uma tábua e diz Raul que a superfície de seu terreno contém 75 vêzes a superfície de uma fôlha de zinco. E o professor responde-lhes que ainda não pode dizer qual dos dois terrenos é o maior, porque êle não conhece a superfície da tábua, nem a da fôlha de zinco. Para que êle possa dizer qual dos dois terrenos é o maior, é necessário que os dois meninos meçam a superfície de seus terrenos, ***tomando como têrmo de comparação uma superfície conhecida,*** por exemplo, ***a superfície de um quadrado cujo lado mede um metro.***

Os dois meninos objetam que não podem medir a superfície de seus terrenos com o auxílio do metro quadrado, porque êles não têm esta medida à sua disposição. Então, responde o professor, vão ao carpinteiro e mandem fazer uma tábua com a forma de um quadrado cujo lado meça um metro.

Armados com estas explicações, os dois meninos retiram-se para proceder novamente à avaliação de seus terrenos. Carlos verificou que o seu terreno tinha 96 metros quadrados e Raul verificou que o seu terreno tinha 84 metros quadrados.

O processo que o professor ensinou aos meninos para medir a superfície de um terreno, é o ***processo direto.*** Mas êste processo, além de ser demorado é, às vêzes, impossível de ser adotado. ***Diretamente*** só se medem os segmentos de reta, os ângulos, o tempo, etc..

Como proceder se quisermos medir diretamente a superfície da nossa sala de aula? Em primeiro lugar é necessário mandar

fazer uma tábua quadrada cujo lado meça um metro. Depois é necessário retirar da sala todos os móveis. Finalmente procuramos verificar quantas vêzes a superfície do metro quadrado está contida na superfície da sala. E ficamos sabendo que a nossa sala tem, por exemplo, 56 metros quadrados de superfície. (*)

Não é difícil perceber a grande dificuldade dêste processo para medir superfícies.

Neste parágrafo quisemos apenas explicar em que consiste a medição direta de uma superfície. A superfície escolhida para medir uma superfície qualquer, isto é, a ***unidade de superfície***, é, em geral, o metro quadrado. Também pode ser o decímetro quadrado, o centímetro quadrado, etc..

O metro quadrado é um quadrado cujo lado mede um metro.

O decímetro quadrado é um quadrado cujo lado mede um decímetro.

O centímetro quadrado é um quadrado cujo lado mede um centímetro.

O milímetro quadrado é um quadrado cujo lado mede um milímetro.

Vejamos agora em que consiste a medição indireta de uma porção de superfície retangular ou quadrada. Tracemos em papel milimetrado, um retângulo ABCD, com 8cm de comprimento (AB) e 6cm de largura (AD). Se contarmos os centímetros quadrados existentes no interior do retângulo ABCD, verificaremos que êles são 48, e diremos que a ***área*** do retângulo ABCD é de 48 centímetros quadrados. Ora, 48 é o produto de 8 (comprimento do retângulo) por 6 (largura do retângulo). Portanto,

8 *centímetros* × 6 *centímetros* = 48 *centímetros quadrados*

Variando as duas dimensões do retângulo, chegaremos sempre à mesma conclusão, isto é:

35 *milímetros* × 15 *milímetros* = 525 *milímetros quadrados*
7 *decímetros* × 5 *decímetros* = 35 *decímetros quadrados*
12 *metros* × 7 *metros* = 84 *metros quadrados*

Podemos, pois, estabelecer a seguinte

Regra. *Para calcular a área de um retângulo, medem-se o comprimento e a largura com a mesma unidade de comprimento.*

(*) Os estudantes podem medir diretamente a superfície de um livro, de um caderno, de um estojo, etc., colocando êstes objetos sôbre uma fôlha de papel milimetrado.

Em seguida, multiplicam-se os dois números obtidos. O resultado representa a área do retângulo, em quadrados, cujo lado é igual à unidade de comprimento escolhida para medir o comprimento e a largura do mesmo retângulo.

Metros multiplicados por metros dão metros quadrados. O que se quer dizer com esta frase é o seguinte: *exprimindo-se o comprimento e a largura de um retângulo em metros, e multiplicando-se os dois valores, o produto representa a área do retângulo em metros quadrados.* Anàlogamente, decímetros multiplicados por decímetros dão decímetros quadrados, etc..

Para calcular a área de um quadrado é bastante medir o comprimento de um de seus lados e multiplicar êste número por si mesmo.

Se traçarmos em papel milimetrado um quadrado cujo lado meça 7 centímetros, verificaremos imediatamente que êste quadrado contém 49 centímetros quadrados. Se o lado do quadrado medir 30 milímetros, o quadrado conterá 900 milímetros quadrados. Se o lado de um terreno quadrado mede 12 metros, êste terreno contém 144 metros quadrados.

> **Chama-se *área* de um retângulo ou de um quadrado, o número que exprime quantas vêzes êste retângulo ou quadrado contém a unidade de área.**

Observação. Acabámos de aprender, de um modo prático, como se mede a área de um retângulo. E, ao mesmo tempo, apresentámos uma primeira justificação da nossa definição da Matemática. (§2) Com efeito, foi necessário estabelecer a relação existente entre o comprimento, a largura e a área de um retângulo para que, por meio das duas primeiras grandezas, comprimento e largura, se pudesse calcular a terceira, isto é, a área do retângulo.

123. Grandezas elementares. As grandezas elementares são três: o *comprimento*, a *massa* e o *tempo*. Estas três grandezas são chamadas elementares, porque delas se derivam as outras. (*)

Grandezas compostas *são as que se definem por meio de produtos ou quocientes de outras grandezas elementares ou compostas.* (*) Como exemplo de uma grandeza composta podemos

(*) Euclides Roxo, *Unidades e Medidas*, págs. 14 e 15.

citar a área de um retângulo a qual, como já vimos anteriormente (§ 122), resulta do produto de duas grandezas elementares, isto é, os comprimentos de dois lados consecutivos do retângulo, chamados, em particular, *comprimento* e *largura* ou *base* e *altura* do mesmo retângulo.

Veremos adiante que o volume de um corpo é também uma grandeza composta, resultante do produto de três comprimentos, isto é, de três grandezas elementares, ou do produto de uma área por um comprimento, isto é, de uma grandeza composta por uma grandeza elementar. (§ 140)

A velocidade de um corpo em movimento é também uma grandeza composta. Suponhamos que um automóvel percorre 160 quilômetros em 5 horas. A velocidade (média) dêste automóvel é de $\frac{160}{5}$ quilômetros por hora, isto é, 32 $\frac{\textit{quilômetros}}{\textit{hora}}$.

Vemos assim que a velocidade é uma grandeza composta, resultante do quociente de duas grandezas elementares: o comprimento e o tempo.

Para medir uma grandeza contínua é necessário adotar uma unidade. As unidades escolhidas para medir as grandezas elementares são chamadas ***unidades fundamentais absolutas.*** No Brasil, as unidades fundamentais absolutas são o *metro*, o *quilograma* e o *segundo*, de acôrdo com o Decreto número 4 257 de 16 de junho de 1939.

124. Unidades de comprimento. *A unidade legal de comprimento é o metro.* O problema de medir, hoje relativamente tão simples, era, há pouco mais de um século, uma fonte contínua de aborrecimentos porque cada país, cada estado, cada cidade, tinha as suas unidades próprias para medir, e estas *unidades* eram *diferentes* entre dois países, entre duas regiões de um mesmo país, e até mesmo entre duas cidades às vêzes muito próximas uma da outra.

Dessa diversidade de unidades resultavam sérias dificuldades para os comerciantes que necessitavam comprar mercadorias fora das cidades onde exerciam sua profissão. Não havendo uniformidade nas unidades de medir, o negociante de um país qualquer, por exemplo, do Brasil, não podia comprar mercadorias na França, sem conhecer as unidades de medir usadas pelos

franceses. E eram freqüentes as questões entre compradores e vendedores, questões essas que, quasi sempre, eram levadas aos tribunais, e resolvidas com prejuízos para ambas as partes.

Coube à França a iniciativa de estabelecer um sistema de unidades de medir, simples e racionais, fáceis de memorizar, e que substituíssem as unidades anteriores numerosíssimas e arbitrárias.

Em 9 de maio de 1790, o govêrno francês encarregou a Academia de Ciências de Paris, de organizar um novo sistema de unidades de medir. Para desobrigar-se dessa incumbência, a Academia nomeou uma comissão de matemáticos notáveis, na qual figuravam Delambre, Méchain, Borda, Lagrange, Laplace, Prony e Bertholet.

Iniciando os trabalhos, esta comissão resolveu, em primeiro lugar, estabelecer a *unidade de comprimento*. E para que esta unidade fosse invariável e independente do tempo e do espaço, resolveram tirá-la do globo terrestre.

Delambre e Méchain foram encarregados de medir a distância do polo Norte ao Equador, isto é, da quarta parte do meridiano terrestre e, tomando como unidade de comprimento uma das unidades usadas naquela época, a *toeza* de Paris, verificaram, após longos anos de trabalho, que essa distância é de 5 130 740 toezas de Paris. Esta distância foi dividida em 10 000 000 de partes iguais, e a cada uma destas partes deu-se o nome de *metro*, do grego *metron*, que significa *medida*.

Em 22 de julho de 1799, foi depositado nos Arquivos Nacionais de Paris um metro de platina que, *por convenção*, ficou representando a décima milionésima parte da distância do polo Norte ao Equador. E compreende-se bem esta *convenção;* é humanamente impossível medir com tôda a precisão a quarta parte do meridiano terrestre. E ficou resolvido que o comprimento dêsse metro de platina, na temperatura de *zero graus*, seria o ***metro legal***.

Trabalhos posteriores, porém, mostraram que a décima milionésima parte da distância do polo Norte ao Equador é um pouco maior que o metro legal; cêrca de 0,0002 do metro.

Hoje o *metro legal* não é mais o metro de platina depositado nos Arquivos Nacionais de Paris; é um outro metro que se

procurou fazer tanto quanto possível, igual ao antigo metro legal, e que está descrito na seguinte

Definição. *O metro é a distância, à temperatura de 0ºC, dos eixos dos dois traços médios gravados sôbre a barra de platina iridiada depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas e considerada como protótipo do metro pela Conferência Geral de Pesos e Medidas* (realizada em Paris, em 1889) *estando submetida à pressão atmosférica normal e suportada por dois rolos com um diâmetro mínimo de um centímetro, situados simètricamente num mesmo plano horizontal e à distância de 571 milímetros um do outro* (*).

Às vêzes, o metro é uma unidade pequena para medir o comprimento de uma linha; outras vêzes é grande. Eis por que os organizadores do sistema métrico estabeleceram outras unidades de comprimento. São os *múltiplos* e os *submúltiplos* do metro. Aliás, só se consideram os múltiplos e submúltiplos decimais.

O metro é a unidade principal de comprimento; seus múltiplos e submúltiplos são unidades secundárias.

Os múltiplos usuais do metro são três: o *decâmetro*, o *hectômetro* e o *quilômetro*. Êstes nomes são constituídos pelas palavras gregas *deca*, *hecto* e *kilo*, ligadas à palavra *metro*. Ora, *deca* significa *dez*; *hecto* significa *cem*; *kilo* significa *mil*. Donde se conclui que:

Um decâmetro vale 10 metros.
Um hectômetro vale 100 metros.
Um quilômetro vale 1 000 metros.

Os principais submúltiplos usuais do metro são três: o *decímetro*, o *centímetro* e o *milímetro*. Êstes nomes são constituídos pelas palavras latinas *deci*, *centi* e *milli* ligadas à palavra *metro*. Ora, *deci* significa *um décimo*; *centi* significa *um centésimo*; *milli* significa *um milésimo*. Donde se conclui que:

Um decímetro é a décima parte do metro.
Um centímetro é a centésima parte do metro.
Um milímetro é a milésima parte do metro.

(*) Euclides Roxo, *Unidades e Medidas*, pág. 25).

MÚLTIPLOS........	quilômetro	(km)	= 1 000 metros
	hectômetro	(hm)	= 100 metros
	decâmetro	(dam)	= 10 metros
UNIDADE..........	metro	(m)	= 1 metro
SUBMÚLTIPLOS....	decímetro	(dm)	= 0,1 do metro
	centímetro	(cm)	= 0,01 do metro
	milímetro	(mm)	= 0,001 do metro

(A)

O quadro A contém os nomes das unidades de comprimento, suas abreviaturas e seus valores em relação ao metro.

Entre outros múltiplos e submúltiplos do metro, podemos mencionar o *megâmetro* (1 000 000 de metros) e o *micron* (0,000 001 do metro ou 0,001 do milímetro), cujos símbolos respectivos são *Mm* e μ, letra grega que se lê *mu*.

Consideremos o número 37 548. É um número abstrato porque não se menciona o nome da unidade. Entretanto, se dissermos 37 548 metros, o número tornar-se-á concreto, visto que se menciona o nome da unidade.

Já sabemos que 1 dam = 10 m, 1 hm = 100 m e 1 km = 1 000 m.

Logo,

O decâmetro é uma dezena de metros.
O hectômetro é uma centena de metros.
O quilômetro é um milhar de metros.

Então, voltando ao número 37 548 m, conclui-se que:

O algarismo 8 representa metros.
O algarismo 4 representa decâmetros.
O algarismo 5 representa hectômetros.
O algarismo 7 representa quilômetros.

E, lembrando os princípios da numeração, teremos:

$$37\,548\text{m} = 3\,754{,}8\text{dam} = 375{,}48\text{hm}$$
$$37\,548\text{m} = 37{,}548\text{km}$$

125. Os submúltiplos do metro e as frações decimais. Consideremos a fração decimal 3,758. É um número abstrato porque não se menciona o nome da unidade. Entretanto, se dissermos 3,758 do metro ou simplesmente 3,758m, o número tornar-se-á concreto, visto que se menciona o nome da unidade. Já vimos que:

O decímetro é a décima parte do metro.
O centímetro é a centésima parte do metro.
O milímetro é a milésima parte do metro.

Então, voltando ao número 3,758m, resulta que:

O algarismo 3 representa metros.
O algarismo 7 representa decímetros.
O algarismo 5 representa centímetros.
O algarismo 8 representa milímetros.

Portanto, 3,758m = 37,58dm = 375,8cm = 3 758mm.

126. Mudança de unidade nas medidas de comprimento. Dizemos habitualmente que a unidade das medidas de comprimento é o metro. Não é bem verdade; o metro é a unidade principal das medidas de comprimento, mas não é a única unidade. A unidade das medidas de comprimento pode ser qualquer: o hectômetro, o centímetro, o quilômetro, o milímetro, etc.. Escolhe-se a unidade de acôrdo com a linha cujo comprimento se quer medir.

As conclusões anteriores (§ § 124 e 125) se resumem no quadro seguinte:

un. de milhar	centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos
9	6	9	5	3	4	7
km	hm	dam	m	dm	cm	mm

(B)

Nos números que representam comprimentos, a unidade escolhida é indicada pela abreviatura correspondente, como se vê no quadro abaixo. Os números escritos neste quadro *devem ser lidos* assim:

3,58m
24,276dam
38,95dm
93,456 78hm
469,7cm
35,293 856km

3	***metros***	e	58 *centímetros*
24	***decâmetros***	e	276 *centímetros*
38	***decímetros***	e	95 *milímetros*
93	***hectômetros***	e	45 678 *milímetros*
469	***centímetros***	e	7 *milímetros*
35	***quilômetros***	e	293 856 *milímetros*

Consideremos o número 3,58m. De acôrdo com o quadro B, êste número contém 3m, 5dm e 8cm, e é igual a 35,8dm ou 358cm.

Consideremos o número 24,276dam. De acôrdo com o quadro B, êste número contém 2hm, 4dam, 2m, 7dm e 6cm. E é igual a 2,427 6hm ou 242,76m ou 2 427,6dm ou 24 276cm.

E assim por diante.

Portanto, a mudança de unidade nas medidas de comprimento é um problema que se resolve com um deslocamento simples e conveniente da vírgula.

Exercícios orais

Reduzir os comprimentos que se seguem, à unidade indicada entre parênteses.

1. 1km (hm)
2. 1km (dam)
3. 1km (m)
4. 1km (dm)
5. 1km (cm)
6. 1km (mm)
7. 1hm (dam)
8. 1hm (m)
9. 1hm (dm)
10. 1hm (cm)
11. 1hm (mm)
12. 1hm (mm)
13. 1dam (dm)
14. 1dam (cm)
15. 1dam (mm)
16. 1m (dm)
17. 1m (cm)
18. 1m (mm)
19. 1m (mm)
20. 1dm (mm)
21. 1cm (mm)
22. 350mm (m)
23. 2 348mm (m)
24. 478cm (m)
25. 324dm (m)
26. 7,8dam (m)
27. 5,6hm (m)
28. 7,28km (m)
29. 9,7m (dm)
30. 2 389mm (dm)
31. 6 724cm (dm)
32. 8,26dam (dm)
33. 7,45hm (dm)
34. 4,38m (cm)
35. 56,27dm (cm)
36. 8,6dam (cm)
37. 3,7hm (cm)
38. 4,2km (cm)
39. 8,7dm (mm)
40. 8,7dm (mm)
41. 4,9m (mm)
42. 5,6dam (mm)
43. 3,81hm (mm)
44. 6,27km (mm)
45. 3 468m (dam)
46. 47 528cm (dam)
47. 47 528cm (dam)
48. 109 720mm (dam)
49. 4,367hm (dam)
50. 5,893km (dam)
51. 3,748m (hm)
52. 6 239dam (hm)
53. 45 786dm (hm)
54. 5,496km (hm)
55. 273 548mm (hm)
56. 2 376dam (km)
57. 37 563m (km)
58. 293 587dam (km)
59. 93,47dam (km)
60. 0,4 do km (m)
61. 0,37 do dam (mm)
62. 0,428 do hm (dm)
63. 0,93 do m (mm)
64. 0,56 do hm (dm)

Exercícios. Série XLIII

Problemas sôbre medidas de comprimento

1. Calcular 3,27hm + 5 896dm + 23,8dam + 34 796cm + 47m + 658dm + 5,683km + 9dam.

2. Calcular em decímetros 8 396mm + 7 857cm + 9 394dm + 37m + + 8,529hm + 37,538dam + 67,3cm.

3. Calcular em decâmetros 3 799cm + 8km + 6 931m + 9dam + + 3 854m + 857 298dm + 37hm + 314 567mm.

4. Calcular em milímetros 614cm + 4,277dam + 856m + 344dm + + 2,57hm + 8km + 6,37hm + 52m.

5. Calcular o preço de 76,24m de sêda a Cr$36,70 o metro.

6. Calcular o preço de 0,498m de sêda a Cr$52,00 o metro.

7. Uma peça de sêda com 14,36m custa Cr$530,00. Qual é o preço de um metro?

8. Um fio de platina com 2,537m custa Cr$3 640,00. Qual é o preço de um decímetro?

9. Comprei sêda a Cr$27,40 o metro e paguei Cr$518,40. Quantos metros comprei?

N. B. Tôdas as vêzes que um quociente representa metros, deve ser calculado com três algarismos decimais.

10. Comprei sêda a Cr$ 36,00 o metro e paguei Cr$ 12,40. Quantos metros comprei? (Resolva-se êste problema com uma única operação.)

11. Comprei fio de platina a Cr$400,00 o metro e gastei Cr$42,80. Quantos metros comprei?

12. Um fio de aço com 346 metros é transformado em agulhas, cujo comprimento é de 0,042m. Vendendo-se estas agulhas a Cr$ 0,06 a dúzia, qual será a importância recebida?

N. B. Se o dividendo e o divisor são comprimentos, é necessário reduzí-los à mesma unidade. Para dividir 27dam por 25dm, isto é, para verificar quantas vêzes uma linha com 25dm está contida em outra linha com 27dam, é necessário reduzir os dois comprimentos à mesma unidade.

13. Quantos degraus tem uma escada com 122,88m de altura, sendo a altura de cada degrau igual a 24cm?

14. Uma escada com 90,22m de altura, tem 347 degraus. Qual é a altura de cada degrau?

15. Dez postes estão colocados em linha reta. A distância entre dois postes consecutivos é de 9,37m. Qual é a distância do primeiro ao último?

16. Ao lado de um estrada de ferro foi construída uma linha telegráfica. Empregaram-se 13 675 postes, sendo a distância entre dois postes consecutivos de 32,8. Calcular o comprimento da linha telegráfica, em km.

17. Uma linha telegráfica tem 762,405km de comprimento. A distância que separa dois postes consecutivos quaisquer desta linha é de 53 metros. Qual é o número de postes?

18. Uma linha telegráfica tem 182km de comprimento. Os postes são 4 376 e são eqüidistantes. Qual é a distância entre dois postes consecutivos?

19. Plantam-se árvores em ambos os lados de uma avenida, a 18 metros umas das outras. A distância entre cada uma das extremidades da avenida e a primeira árvore é também de 18 metros. O comprimento da avenida é de 42,84hm. Calcular a quantia necessária para plantar estas árvores, se cada uma delas custa Cr$ 3,70 e o trabalho custa Cr$ 1,50 por árvore.

20. Um lavrador tem um terreno retangular de 264m por 154m. Quer plantar café nesse terreno. As mudas devem ser plantadas no sentido do comprimento e no sentido da largura, e de modo tal que, quer num sentido,

quer no outro, a distância entre duas mudas consecutivas seja de uma braça ou 10 palmos (2,2m). Se cada muda custa Cr$ 0,50 e o trabalho de plantá-la custa Cr$ 0,34, em quanto ficarão as despesas desta plantação?

21. Cerca-se um terreno retangular de 570m por 360m, com um duplo fio de arame. Êste fio é pregado em estacas eqüidistantes umas das outras, havendo uma estaca em cada vértice do terreno. O intervalo entre duas estacas consecutivas é de 0,40m. Um rôlo de arame tem 360 metros e custa Cr$ 56,70. As estacas são pagas a Cr$ 83,50 cada cento. Calcular o custo da cêrca.

22. A toesa de Paris mede aproximadamente 1,98m. Calcular em toesas a distância do polo Norte ao Equador, do polo Norte ao polo Sul, e o comprimento do meridiano terrestre.

23. O meridiano terrestre mede aproximadamente 40 000 000 de metros. Calcular o comprimento do grau do meridiano, do minuto e do segundo.

24. A circunferência da roda de um automóvel mede 1,86m. Quantas voltas darão as quatro rodas dêste automóvel, numa distância de 37hm?

25. Com 107,48m de um fio de metal, fiz pregos de 43,8mm cada um. Vendendo êstes pregos a Cr$ 0,72 a dúzia, quanto recebí?

26. Uma sala mede 8,4 por 6,5m. Faz-se o assoalho desta sala com tábuas de 21dm por 52mm. A tábua é comprada à razão de Cr$ 2,70 por metro linear. Calcular o custo do assoalho.

N. B. Para resolver êste problema, não é permitido calcular a área da sala e a da tábua.

27. Em uma sala quadrada cujo perímetro mede 31 metros, extende-se um tapête quadrado cujos bordos ficam a 0,87m das paredes. Calcular o perímetro do tapête.

28. Para proteger um reservatório de água, de base quadrada, e com um perímetro de 791 metros, construiu-se uma cêrca a 1,75m de distância dos bordos do reservatório. Pagou-se Cr$ 3,80 por metro de cêrca. Calcular o custo de tôda a cêrca.

29. Em um salão retangular de 18,7m por 12,9m estende-se um tapête cujos bordos ficam a 0,53m das paredes. Calcular o perímetro do tapête.

30. Para proteger um campo de futebol com 138,7m por 94,33m, construiu-se uma cêrca a 3,49m de distância das linhas marginais do campo. Calcular o custo da cêrca à razão de Cr$ 8,79 o metro.

31. Um terreno retangular mede 2,357 8km por 75,64dam. Abrem-se duas ruas neste terreno, perpendiculares entre si, uma no sentido do comprimento e outra no sentido da largura, e de modo que o terreno fica dividido em 4 retângulos iguais. A largura das duas ruas é de 11,7m. Em seguida, cercam-se os quatro retângulos, pagando-se Cr$ 3,80 por metro de cêrca. Calcular o custo das 4 cêrcas.

32. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo cujo perímetro é de 117,4m, sendo o comprimento igual ao triplo da largura.

33. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro é de 297,4m, sendo o comprimento igual ao quadruplo da largura.

34. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro é de 438,6m, sendo o comprimento igual ao quíntuplo da largura.

35. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 52m, sendo a largura igual a três quintos do comprimento.

36. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 374m, sendo a largura igual a três sétimos do comprimento.

37. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 26,1m, sendo o comprimento igual a onze quartos da largura.

38. Calcular o comprimento e a largura de um retângulo, cujo perímetro mede 42,3m, sendo o comprimento igual a treze quintos da largura.

39. Um agrimensor mediu o comprimento de uma avenida, servindo-se de uma corrente metálica de dez metros (corrente do agrimensor) e achou 2 358,7m. Mas, em seguida, verificou que a corrente estava defeituosa, faltando 56mm para completar os dez metros que a corrente deve ter. Qual é o comprimento exato da avenida?

40. Um negociante vendeu 37,8m de sêda a Cr$ 53,80. Mas, o metro com o qual êle mediu a sêda está errado, por ter 31mm mais do que o metro legal. Qual foi o seu prejuízo?

41. Um engenheiro mediu o comprimento de uma estrada de rodagem e achou 314,8km. Mais tarde verificou que tinha cometido um êrro para mais de 0,45m em cada hectômetro. Qual é o comprimento exato de estrada?

42. Comprei arame para cercar um terreno cujo perímetro é de 137,947dam. A cêrca deve ser feita com 3 fios. Mas, devido a uma grande baixa da temperatura, o arame diminuiu 4mm em cada metro. Quantos metros de arame devo comprar para concluir a cêrca?

43. Um fio de cobre, a zero graus, tem um comprinento de 4,37m. Qual será o comprimento dêste mesmo fio, a 60 graus se, para cada grau o fio aumenta de 0,000 018 por metro?

44. Um fio de prata, a 60 graus, tem um comprimento de 9,25m. Qual será o comprimento dêste mesmo fio, a 25 graus se, para cada grau, o fio aumenta de 0,000 019 por metro?

45. Uma fita de zinco, a zero graus, tem um comprimento de 14,8m. Qual será seu comprimento a 100 graus se, para cada grau, a fita aumenta de 0,000 03 por metro?

46. O comprimento de duas peças de sêda é de 35,85m. Tiram-se 12,3m de cada uma das peças e o que resta da primeira é igual ao dôbro do que resta da segunda. Qual é o comprimento de cada peça?

47. O comprimento de três peças de brim é de 42,3m. Tiram-se 5,7m de cada uma das peças e então o resto da primeira é igual a 3 vêzes o resto da terceira, e o resto da segunda é igual a 2 vêzes o resto da terceira. Qual é o comprimento de cada peça?

48. Um trilho tem 15,8m de comprimento. Entre dois trilhos deixa-se um intervalo de 6,4mm. (por quê?) Quantos metros de trilhos serão necessários para construir uma estrada de ferro com 53,510 132km e de linha dupla?

49. Pedro e Paulo vão a pé da praça da República até a Avenida Atlântica. Pedro percorre 123,8 por minuto e Paulo percorre 1,93m por segundo. Ao cabo de uma hora e três quartos, qual é a distância que separa os dois?

50. Dois automobilistas, A e B, partem de São Paulo com destino ao Rio de Janeiro. O automobilista A parte às 6 horas da manhã com a velocidade média de 37,6km por hora. O automobilista B parte às 7 horas e 12 minutos com a velocidade média de 51,8km por hora. A que horas B alcançará A?

127. Unidades de área. Já vimos em que consiste a área de uma porção de superfície plana limitada. (§ 122) Na prática empregamos indiferentemente as palavras *área* e *superfície*, embora não signifiquem precisamente a mesma coisa. Não há grande mal nisto, contanto que não se perca de vista o seguinte:

Quando dizemos que a superfície de um terreno mede 320 *metros quadrados, queremos dizer que a área desta superfície limitada é de* 320 *metros quadrados.*

Uma área é uma grandeza composta. (§ 123) A unidade de área (ou de superfície) não é, pois, uma *unidade fundamental;* é uma ***unidade derivada.***

> **A unidade legal de área é um quadrado cujo lado é tomado como unidade de comprimento.**

Consideremos a figura 3. Se o lado AB é tomado como unidade de comprimento, o quadrado ABCD será a unidade de área. Se AB mede um metro, ABCD é um metro quadrado; se AB mede uma braça, ABCD é uma braça quadrada; se AB mede um decâmetro, ABCD é um decâmetro quadrado; e assim por diante.

Assim como acontece com o metro linear, o metro quadrado pode ser muito grande ou muito pequeno para calcular uma área. Eis por que existem outras unidades de área, maiores e menores que o metro quadrado.

O metro quadrado é a unidade principal de área; seus múltiplos e submúltiplos são as unidades secundárias.

Se o lado AB (figura 3). mede um metro linear, e estando êste segmento dividido em dez partes iguais, resulta que o segmento AM mede um decímetro linear. Ora, o quadrado ABCD medindo um metro quadrado, resulta que o quadrado AMNO mede um decímetro quadrado. E a figura nos mostra que:

1 *metro quadrado* = **100** *decímetros quadrados*

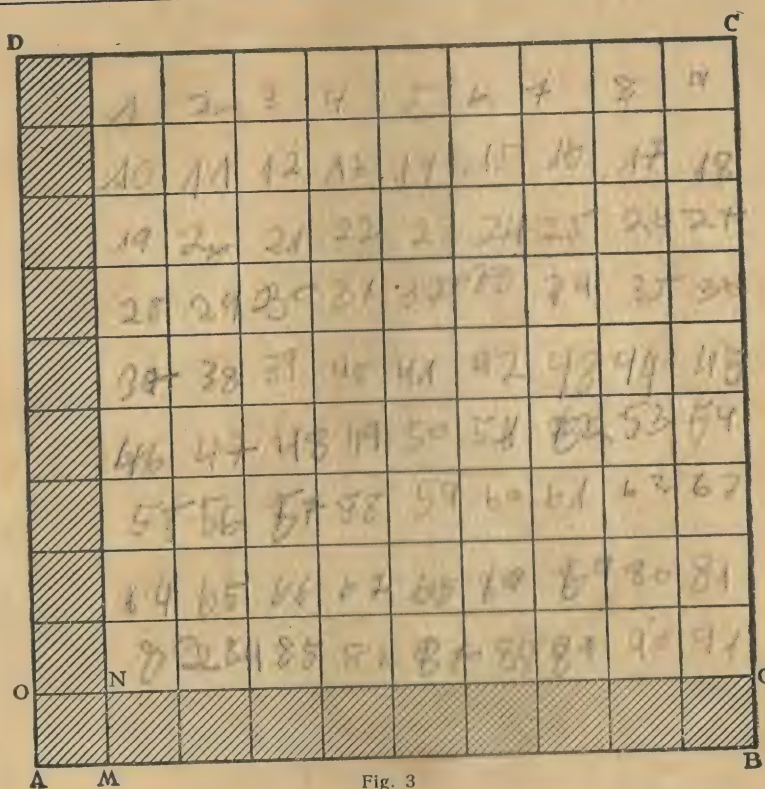


Fig. 3

Logo, *um decímetro quadrado é a centésima parte de um metro quadrado.*

E a faixa ABGO sendo a décima parte do metro quadrado ABCD, resulta de pronto que:

0,1 *do metro quadrado* = 10 *decímetros quadrados*

Supondo que o lado AB meça um decímetro, ABCD será um decímetro quadrado, AMNO será um centímetro quadrado, e concluiremos que:

1 *decímetro quadrado* = 100 *centímetros quadrados*
1 *centímetro quadrado* = 0,01 *do decímetro quadrado*
0,1 *do decímetro quadrado* = 10 *centímetros quadrados.*

Enfim, supondo AB igual, sucessivamente a um decâmetro, um hectômetro, um quilômetro, um centímetro, etc., estabeleceremos com facilidade as conclusões resumidas no quadro C.

MÚLTIPLOS...	quilômetro quadrado	(km^3)	=	1 000 000m^2
	hectômetro quadrado	(hm^2)	=	10 000m^2
	decâmetro quadrado	(dam^2)	=	100m^2
UNIDADE.....	metro quadrado	(m^2)	=	1m^2
SUBMÚLTIPLOS	decímetro quadrado	(dm^2)	=	0,01 do m^2
	centímetro quadrado	(cm^2)	=	0,000 1 do m^2
	milímetro quadrado	(mm^2)	=	0,000 001 do m^2

(C)

128. Os submúltiplos do metro quadrado e as frações decimais. De acôrdo com o quadro (C) podemos estabelecer que:

1m^2 = 100dm^2	1m^2 = 10 000cm^2	1m^2 = 1 000 000mm^2
1dm^2 = 100cm^2	1dm^2 = 10 000mm^2	
1cm^2 = 100mm^2		

Se um m^2 tem 100dm^2, 1dm^2 é a centésima parte do m^2. Consideremos a fração decimal 3,48 (3 unidades e 48 centésimos). Escrevendo m^2 à direita dêste número, teremos 3,48m^2, isto é, 3m^2 e 48 centésimos do m^2. Mas, centésimos do m^2 são decímetros quadrados. Logo, 3,48m^2 significa 3m^2 e 48dm^2. Consideremos o número 7,8m^2. São 7m^2 e 0,8 do m^2. Ora, 0,1 do m^2 tem 10dm^2; então 0,8 do m^2 são 80dm^2. Portanto, 7,8m^2 são 7m^2 e 80dm^2 ou 7,80m^2. Donde se conclui que, para ler números como 3,6m^2... 7,5m^2... 0,4m^2... convém juntar um zero à direita da fração decimal, para dar a êstes números a forma 3,60m^2, 7,50m^2, 0,40m^2. Em seguida, ler-se-á 3m^2 e 60dm^2, 7m^2 e 50dm^2, 40dm^2.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^2, escrever as áreas seguintes:

1. 3m^2 e 7dm^2	**5.** 2m^2 e 30dm^2	**9.** 1m^2 e 346dm^2
2. 28dm^2	**6.** 238dm^2	**10.** 2m^2 e 600dm^2
3. 5m^2 e 1dm^2	**7.** 3m^2 e 525dm^2	**11.** 7 438dm^2
4. 46dm^2	**8.** 376dm^2	**12.** 4m^2 e 56dm^2

Ler de todos os modos possíveis, as áreas seguintes:

13. 3,45m^2	**15.** 0,59m^2	**17.** 5,1m^2	**19.** 647dm^2
14. 5,58m^2	**16.** 2,8m^2	**18.** 13,8m^2	**20.** 533dm^2

Se um m^2 tem 10 000cm^2, 1cm^2 é a décima milésima parte do m^2. Consideremos o número 7,005 8 (7 unidades e 58 décimos milésimos). Escrevendo m^2 à direita dêste número, teremos 7,005 8m^2, isto é, 7m^2 e 58 décimos milésimos do m^2. Mas, décimos milésimos do m^2 são centímetros quadrados. Logo, 7,005 8m^2 significa 7m^2 e 58cm^2.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^2, escrever as áreas seguintes:

1. 3m^2 e 44cm^2
2. 1m^2 e 47cm^2
3. 2m^2 e 346cm^2
4. 5m^2 e 2 358cm^2
5. 593cm^2
6. 47dm^2 e 93cm^2
7. 56dm^2 e 348cm^2
8. 259dm^2 e 37cm^2
9. 3m^2, 5dm^2 e 7cm^2

Ler de todos os modos possíveis, as áreas seguintes:

10. 4,3628m^2
11. 0,5739m^2
12. 0,478m^2
13. 0,001m^2
14. 0,1234m^2
15. 0,447m^2

Se 1m^2 tem 1 000 000mm^2, 1mm^2 é a milionésima parte do m^2. Consideremos o número 4,000 057 (4 unidades e 57 milionesimos). Escrevendo m^2 à direita dêste número, teremos 4,000 057m^2, isto é, 4m^2 e 57 milionésimos do m^2. Mas, milionésimos do m^2 são mm^2. Logo, 4,000 057m^2 significa 4m^2 e 57mm^2.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^2, escrever as áreas seguintes:

1. 4m^2 e 38mm^2
2. 7m^2 e 96mm^2
3. 5m^2 e 387mm^2
4. 11m^2 e 2 578mm^2
5. 25 748mm^2
6. 7dm^2 e 86mm^2
7. 15cm^2 e 34mm^2
8. 3m^2, 7cm^2 e 9mm^2
9. 5dm^2, 8cm^2 e 6mm^2

Ler de todos os modos possíveis, as áreas seguintes:

10. 3,574 916m^2
11. 0,842 76m^2
12. 2,405 060m^2
13. 0,223 34m^2
14. 0,572 284m^2
15. 7 635 27m^2

Consideremos o número 3,574 829. Escrevendo m^2 à direita dêste número, teremos 3,574 829m^2. E de tudo o que dissemos neste parágrafo resulta que:

$$\begin{aligned}
3{,}574\,829m^2 &= 3m^2 + 57dm^2 + 48cm^2 + 29mm^2\\
4{,}368\,27m^2 &= 4m^2 + 36dm^2 + 82cm^2 + 70mm^2\\
5{,}412\,3m^2 &= 5m^2 + 41dm^2 + 23cm^2\\
6{,}293m^2 &= 6m^2 + 29dm^2 + 30cm^2\\
7{,}56m^2 &= 7m^2 + 56dm^2\\
8{,}9m^2 &= 8m^2 + 90dm^2
\end{aligned}$$

129. Mudança de unidade nas medidas de área. O metro quadrado é a *unidade principal* de área. Mas a unidade de área pode ser qualquer: o dam^2, o dm^2, o hm^2, o cm^2, etc.. Escolhe-se a unidade de área, de acôrdo com a porção de superfície limitada que se quer medir.

(D)

unidades	centésimos	déc. milés.	milionés.
3,	57	48	29
m^2	dm^2	cm^2	mm^2

As conclusões a que chegámos no parágrafo anterior podem ser resumidas no quadro ao lado.

Nos números que representam áreas a unidade escolhida é representada pela abreviatura correspondente.

Consideremos o número $3{,}475\,2m^2$. De acôrdo com o quadro D, êste número contém $3m^2$, $47dm^2$ e $52cm^2$. E $3{,}475\,2m^2 = 347{,}52dm^2 = 34\,752cm^2 = 3\,475\,200mm^2$.

Anàlogamente, $8{,}563\,7dm^2 = 0{,}085\,637m^2 = 856{,}37cm^2 =$ $= 85\,637mm^2$.

Portanto, a mudança de unidades nas medidas de área é um problema que se resolve com um deslocamento simples e conveniente da vírgula.

Exercícios em classe

Reduzir as áreas que se seguem à unidade indicada entre perênteses.

1. $8m^2$ (mm^2)	**6.** $0{,}85m^2$ (mm^2)	**11.** $0{,}472m^2$ (mm^2)
2. $9dm^2$ (cm^2)	**7.** $0{,}036m^2$ (mm^2)	**12.** $0{,}5793m^2$ (mm^2)
3. $7dm^2$ (mm^2)	**8.** $0{,}4527m^2$ (mm^2)	**13.** $3{,}8cm^2$ (mm^2)
4. $6cm^2$ (mm^2)	**9.** $3{,}37dm^2$ (mm^2)	**14.** $3{,}76cm^2$ (mm^2)
5. $3{,}27m^2$ (mm^2)	**10.** $0{,}56m^2$ (cm^2)	**15.** $0{,}4cm^2$ (mm^2)
16. $1{,}57cm^2$ (mm^2)	**20.** $0{,}437m^2$ (cm^2)	**24.** $0{,}698m^2$ (dm^2)
17. $8{,}9m^2$ (cm^2)	**21.** $0{,}5863m^2$ (cm^2	**25.** $23m^2$ (dm^2)
18. $7{,}36m^2$ (cm^2)	**22.** $0{,}3987m^2$ (dm^2)	**26.** $9m^2$ (cm^2)
18. $7{,}36m^2$ (cm^2)	**22.** $0{,}3987m^2$ (dm^2)	**27.** $15m^2$ (mm^2)
19. $0{,}8m^2$ (cm^2)	**23.** $3{,}25m^2$ (dm^2)	**28.** $36m^2$ (cm^2)

130. Os múltiplos do metro quadrado. Os múltiplos usuais do metro quadrado são o dam^2, o hm^2 e o km^2 (quadro C). São quadrados cujos lados medem respectivamente 1dam, 1hm e 1km.

Se $AB = 1dam$, (fig. 3) então $AM = 1m$, ABCD será $1dam^2$, AMNO será $1m^2$ e teremos $1dam^2 = 100m^2$.

Se AB = 1hm, então AM = 1dam, ABCD será $1hm^2$, AMNO será $1dam^2$ e teremos $1hm^2 = 100dam^2$.

Se AB = 1km, então AM = 1hm, ABCD será $1km^2$, AMNO será $1hm^2$ e teremos $1km^2 = 100hm^2$.

$1km^2 = 100hm^2$	$1km^2 = 10\,000dam^2$	$1km^2 = 1\,000\,000m^2$
$1hm^2 = 100dam^2$	$1hm^2 = 10\,000m^2$	$1hm^2 = 1\,000\,000dm^2$
$1dam^2 = 100m^2$	$1dam^2 = 10\,000dm^2$	$1dam^2 = 1\,000\,000cm^2$

Seja o número 45 678 924. É um número abstrato, porque não se menciona o nome da unidade. Entretanto, se dissermos $45\,678\,924m^2$, o número tornar-se-á concreto, porque se menciona o nome da unidade.

Já sabemos que $1dam^2 = 100m^2$, $1hm^2 = 10\,000m^2$, $1km^2 = 1\,000\,000m^2$. Portanto,

Um dam^2 é uma centena de m^2.
Um hm^2 é uma dezena de milhar de m^2.
Um km^2 é uma unidade de milhão de m^2.

Voltando ao número $45\,678\,924m^2$ e dividindo-o em classes de dois algarismos, da direita para a esquerda, teremos,

$$45\,678\,924m^2 = 45km^2 + 67hm^2 + 89dam^2 + 24m^2$$

E, de acôrdo com os princípios da numeração,

$$45\,678\,924m^2 = 456\,789{,}24dam^2 = 4\,567{,}892\,4hm^2 = \\ = 45{,}678\,924km^2$$

Tudo o que dissemos (§ § 127 a 130) pode ser resumido no quadro seguinte:

unid. de milhão	dez. de milhar	centenas	unidades	centésimos	décimos milés.	milionésimos
3 7	5 8	1 9	6 7	4 2	3 8	2 9
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

(E)

A mudança de unidade nas medidas de área é, pois, um problema facílimo. Observando o quadro E resulta que:

$$37{,}859\,7\text{km}^2 = 3\,785{,}97\text{hm}^2 = 378\,597\text{dam}^2$$
$$18{,}37\text{hm}^2 = 0{,}183\,7\text{km}^2 = 1\,837\text{dam}^2$$
$$23{,}59\text{m}^2 = 0{,}235\,9\text{dam}^2 = 0{,}002\,359\text{hm}^2.$$

Exercícios orais

Reduzir as áreas que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 7,8dam² (dm²)
2. 8,396hm² (dm²)
3. 73 248cm² (dm²)
4. 4,7km² (dm²)
5. 37,6km² (m²)
6. 54,9hm² (m²)
7. 87,345dam² (m²)
8. 37 496,7m² (dam²)
9. 587 693cm² (dam²)
10. 23,8915hm² (dam²)
11. 8,39km² (dam²)
12. 147 528m² (hm²)
13. 376,57dam² (hm²)
14. 8,936km² (hm²)
15. 57 593m² (hm²)
16. 8 379m² (km²)
17. 37 586,9dam² (km²)
18. 623,7hm² (km²)
19. 375,6m² (cm²)
20. 1 385 927dm² (dam²)
21. 0,3km² (hm²)
22. 0,396hm² (m²)
23. 0,008km² (dm²)
24. 0,39dam² (dm²)
25. 0,0047dam² (cm²)
26. 0,3468dam² (m²)
27. 0,645hm² (dm²)

28. Tomando como unidade o metro quadrado, escrever no quadro negro os números seguintes: 3km² e 26dam²; 8km², 37dam² e 9dm²; 6hm², 47m² e 58cm², etc., etc..

29. É dado o número 539 651,735 849m². Ler êste número de todos os modos possíveis.

Exercícios. Série XLIV

Problemas sôbre áreas

1. Calcular em metros quadrados a área de um terreno retangular que mede 34,7dam por 258,9m.

2. Calcular em dam² a área de um terreno retangular que mede 7,45hm por 386m.

3. Calcular em dm² a área de um terreno retangular que mede 27,34m por 235dm.

4. Calcular em dam² a área de um terreno quadrado cujo lado mede 307,4m.

5. Calcular em dm² a área de um terreno quadrado cujo lado mede 8,41m.

6. A área de um retângulo é de 47,56dam² e o comprimento é de 845dm. Calcular em metros a largura dêste retângulo com êrro inferior a 0,001m.

7. A área de um retângulo é de 37,56m² e o comprimento é de 84,5dm. Calcular em metros, a largura dêste retângulo, com êrro inferior a 0,001m.

8. O perímetro de um retângulo é de 37,4m e o comprimento é o triplo de largura. Pede-se a área do retângulo.

9. O perímetro de um retângulo é de 37,2m e o comprimento é igual a cinco vêzes a largura. Pede-se a área do retângulo.

10. O perímetro de um retângulo é de 58,87m e a largura é igual a dois quintos do comprimento. Pede-se a área do retângulo.

11. O perímetro de um retângulo é de 5,58m e a largura é igual a três sétimos do comprimento. Pede-se a área do retângulo.

12. Um terreno de forma retangular mde 647,5m por 328,7m. Abrem-se duas ruas neste terreno, perpendiculares entre si, e à igual distância dos limites do terreno. Fica assim o terreno dividido em 4 quarteirões iguais. A largura das ruas é de 11,8m. Calcular a área das duas ruas e a área dos quatro quarteirões.

13. Quantas tábuas de 2,24m por 0,18m são necessárias para assoalhar uma sala de 17,8m por 7,4m?

14. Quantas pedras quadradas cujo lado mede 23cm são necessárias para calçar uma rua com 18m de largura e 23,38hm de comprimento?

15. Comprei um terreno com 78,5m por 43,7m pagando Cr$ 3,70 por metro quadrado. Mais tarde verifiquei que o terreno tinha 2,7m de mais no comprimento e 4,3m de menos na largura. Quanto paguei pelo terreno? Quanto devia ter pago?

16. Calcular $7{,}36\text{dam}^2 + 15{,}98\text{hm}^2 + 3\,270\text{m}^2 + 64\,790\text{dm}^2$.

17. Calcular $3{,}8\text{m}^2 + 5{,}9\text{dm}^2 + 7{,}6\text{cm}^2 + 345\,000\text{mm}^2$.

18. Calcular $4{,}3\text{dam}^2 + 987\text{dm}^2 + 5\text{hm}^2 + 328\,600\text{cm}^2 + 93{,}574\text{m}^2 + 648{,}93\text{dm}^2 + 234\,568\text{cm}^2$.

19. Mediu-se a superfície de um quadrado e achou-se $10{,}6929\ \text{dam}^2$. Mais tarde verificou-se que o metro que servira para medir o lado do quadrado, estava errado, tendo 5mm mais do que o metro legal. Qual é, em metros quadrados, a área exata do quadrado?

20. Mediu-se a superfície de uma retângulo e achou-se $0{,}103\,587\text{hm}^2$. Mais tarde verificou-se que o metro que servira para medir as duas dimensões do retângulo estava errado, tendo 4mm menos que o metro legal. Sendo o comprimento medido primitivamente igual a 47,3m, pergunta-se qual é, em metros quadrados, a área exata do retângulo.

21. Em um terreno de forma retangular o comprimento é o triplo da largura. Mediu-se o perímetro dêste terreno e achou-se 746,4m. Em seguida, verificou-se que a corrente estava defeituosa, faltando-lhe 6cm para os 10 metros legais que ela deveria ter. Pede-se a área exata do terreno.

22. Para ladrilhar um aposento com 7,48m por 4,53m, empregam-se ladrilhos quadrados cujo lado mede 0,32m e que custam Cr$ 635,00 por milheiro. O operário encarregado dêste serviço ganha Cr$ 13,70 por metro quadrado. Calcular a despesa total.

23. Cerca-se um jardim com 86,9m por 45,7m, com uma parede de 2,36m de altura, cuja construção custa Cr$ 8,60 por metro quadrado. Calcular o custo da parede.

24. Construiu-se uma parede com 9,6m de comprimento por 3,14m de altura. A despesa com os tijolos foi de Cr$ 3,70 por metro quadrado, pagando-se os tijolos a Cr$ 92,00 cada milheiro. Quantos tijolos foram empregados na construção desta parede?

25. Um rôlo de papel mede 7m por 0,36m. Uma sala mede 8,5m de comprimento, 6,4m de largura e 4,2m de altura. Tem três janelas que medem 1,98m por 0,85m cada uma e duas portas que medem 2,8m por 1,2m cada uma. O rodapé da sala tem 0,22m de altura. Quantos rolos de papel serão necessários para forrar as 4 paredes desta sala?

26. A superfície de um livro é de 0,28m por 0,18m. Quantos metros quadrados de papelão serão necessários para cartonar 3 640 livros?

27. Um telhado retangular tem 24,7m por 13,5m. Uma telha mede 0,45m por 0,22m. Fazendo o telhado verifica-se que, ao colocar uma telha sôbre a outra, cada uma delas perde 0,04m na largura. As telhas custam Cr$ 65,00 cada cento. Calcular o custo do telhado e o número de telhas nêle existente.

28. Um pátio de forma retangular tem 96 metros por 43,5m. Faz-se neste pátio, ao longo das paredes, um passeio com 2,20m de largura. Calcular a área do passeio e a do retângulo por êle limitado.

131. Unidades agrárias. São as unidades que se empregam para calcular a área de terras cultivadas, fazendas, pastagens, campos, matas, etc..

São três: o *hectare*, o *are* e o *centiare*. A unidade é o are que é igual a um decâmetro quadrado. O are tem um múltiplo que é o hectare e um submúltiplo que é o centiare. O are é a unidade legal.

MÚLTIPLO	{ hectare	(ha)	= $1hm^2$	= 100 ares	
UNIDADE	{ are	(a)	= $1dam^2$	= 1 are	(F)
SUBMÚLTIPLO	{ centiare	(ca)	= $1m^2$	= 0,01 do are	

Os lavradores medem suas terras em *alqueires*. São usados no interior do Brasil duas espécies de alqueires: o alqueire paulista, com 5 000 braças quadradas e o alqueire mineiro, com 10 000 braças quadradas.

A braça quadrada é um quadrado cujo lado mede 2,2m. Portanto,

1 braça quadrada = $4{,}84m^2$

1 alqueire paulista = 5 000 braças quadradas = $24\ 200m^2$

1 alqueire mineiro = 10 000 braças quadradas = $48\ 400m^2$

Exercícios orais

Reduzir as áreas que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 3,75a (ca)
2. 4,78ha (ca)
3. 3,96ha (ca)
4. 476 528ca (ha)
5. 374 298ca (ha)
6. 493,38a (ha)
7. 3,6718ha (ares)
8. 316 729ca (ares)
9. 47,8m^2 (ca)
10. 3 726ca (m^2)
11. 2,29ha (m^2)
12. 3,476a (m^2)
13. 5,36hm^2 (ca)
14. 3,48hm^2 (ca)
15. 17,96dam^2 (ca)
16. 8,59^2 (ha)
17. 17,6dm^2 (ca)
18. 32,478cm^2 (ca)
19. 9,7km^2 (ha)
20. 12,86hm^2 (ha)
21. 36,79dam^2 (ha)
22. 3 478,6m^2 (ha)
23. 678 596dm^2 (ha)
24. 3,47a (dm^2)
25. 8,96ca (dm^2)
26. 49,85ca (m^2)
27. 2,479 6a (m^2)
28. 3,182 79ha (m^2)
29. 6 473,8m^2 (ca)
30. 12 356,7m^2 (ares)
31. 4,46dam^2 (ares)
32. 293 756,8m^2 (ha)
33. 9 237,56m^2 (ares)
34. 123,38dam^2 (ares)
35. 3,97hm^2 (ares)
36. 6km^2 (ares)
37. 374 568m^2 (ares)
38. 7,38ha (dm^2)
39. 0,84ha (dm^2)
40. 30,72ha (dam^2)
41. 97,48a (dam^2)
42. 3 758,96ca (dam^2)
43. 0,235ha (dam^2)
44. 3,427a (cm^2)
45. 15,89ca (cm^2)
46. 0,0478ha (cm^2)
47. 376,84ha (hm^2)
48. 936 527a (hm^2)
49. 3 268dm^2 (ares)
50. 648,93a (dm^2)

Exercícios. Série XLV

Problemas sôbre medidas agrárias

1. Reduzir a ares 3,27ha + 528,69a + 37 586ca + 6,28dam^2 + 9,37hm^2 + 6 328m^2.

2. Reduzir a hectares 8,47km^2 + 23,9hm^2 + 567,48dam^2 + 23 758m^2 + + 32,85ha + 6 279,47a + 345 600ca.

3. Calcular em ares a área de um terreno quadrado cujo lado mede 47,8m.

4. Calcular em hectares a área de um terreno retangular que mede 8,45km por 34,6hm.

5. Um terreno retangular mede 3,4728ha. O comprimento é de 29,5dam. Calcular a largura dêste terreno, em metros, com êrro inferior a 0,01m.

6. Calcular o valor de um terreno com 34,9dam por 78,5m a Cr$ 3,70 cada centiare.

7. Comprei um terreno com 8,4a por Cr$ 3 990,00. Quanto pagarei por um terreno do mesmo valor que o primeiro e com uma área de 37,53ha?

8. Comprei um terreno com 37,4a por Cr$ 1 892,00 . Quantos metros quadrados do mesmo terreno eu poderia comprar com Cr$ 50 000,00?

9. Um terreno com 48 metros de largura foi vendido ao preço de Cr$ 4,50 por are e custou Cr$ 7 380,00. Qual é o seu comprimento?

10. Um campo retangular mede 120m por 84m. Cada are dêste campo produz 3 hectolitros de trigo. Vendendo-se cada hectolitro a Cr$ 64,00, qual é o valor de toda a colheita?

11. Comprei três terrenos. O primeiro é quadrado, seu lado mede 85 metros e paguei Cr\$ 8,00 por centiare; o segundo é retangular, com 15,7dam por 128m e paguei Cr\$ 0,04 por decímetro quadrado; o terceiro tem uma área de $3{,}46hm^2$ e paguei Cr\$ 325,00 por are. Quanto paguei pelos três terrenos? Qual é a sua área total em ares?

12. Calcular o valor de dois terrenos, o primeiro com 4ha 7a 8ca e o segundo com 5ha 12ca, a Cr\$ 3,00 por metro quadrado.

13. Reduzir a metros quadrados 3,47ha + 58,28a + 837,9ca.

14. Reduzir a hectares $846km^2 + 35{,}87hm^2 + 96{,}25hm^2 + 1\,234{,}62dam^2 + 647\,548m^2$.

15. Calcular em hectares a área de um terreno quadrado cujo lado mede 3,25km.

16. Calcular em hectares a área de um terreno retangular com 48km de comprimento e 376hm de largura.

17. Uma fazenda tem uma área de 435,8 alqueires paulistas. Qual é a sua área em ares?

18. Uma fazenda tem uma área de $45{,}8km^2$. Qual é a sua área em alqueires paulistas?

19. Uma fazenda de forma retangular tem 246 alqueires paulistas. Sendo o seu comprimento igual a 4,36km, qual é a sua largura em decâmetros?

20. Um milharal tem 47 alqueires paulistas. Cada braça quadrada dêste milharal produz 75 litros de milho que se vende a Cr\$ 1,30 o litro. Calcular o valor da colheita.

21. Calcular em alqueires paulistas a área de uma chácara retangular que tem 2 450 braças de comprimento por 860 braças de largura.

132. Area do retângulo e do quadrado. Seja o retângulo ABCD cuja base AB mede 6cm e cuja altura AD mede 4cm.

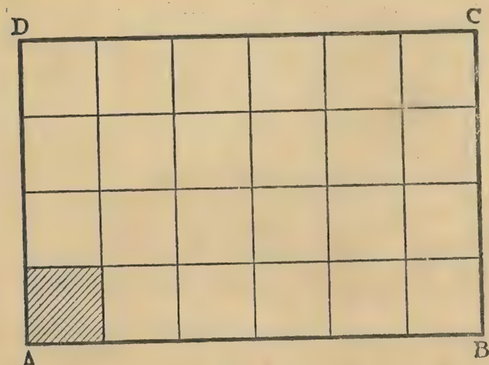


Fig. 4

A partir do vértice A determinemos em AB, assim como em AD, segmentos de um centímetro cada um. Pelos pontos de divisão tracemos paralelas à base e à altura. O retângulo ficará dividido em 24 quadrados iguais, cada um dos quais é um centímetro quadrado. E diremos que a área do retângulo ABCD é $24cm^2$.

Para calcular a área de um retângulo, medem-se a base e a altura com a mesma unidade de comprimento e multiplicam-se as duas medidas; o resultado é a área do retângulo, em unidades de área cujo lado é igual à unidade de comprimento escolhida. E na linguagem corrente dizemos:

A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura *(ou do comprimento pela largura).*

A base (ou comprimento) de um retângulo é geralmente o lado maior; a altura (ou largura) é, de um modo geral, o lado menor. Estas denominações são relativas; por exemplo, no retângulo MNPR (fig. 5), a base MN é o lado menor; a altura MR, é o lado maior.

Representando a área de um retângulo por ***s***, a base por ***b*** e a altura por ***h***, podemos estabelecer as seguintes fórmulas:

$$\boxed{s = b \times h} \qquad \boxed{b = \frac{s}{h} \qquad h = \frac{s}{b}}$$

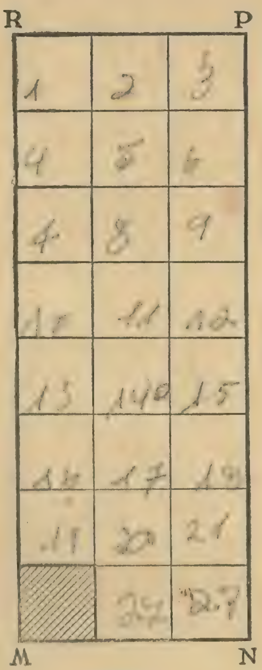


Fig. 5

Conhecendo-se a área e a base (ou a altura) de um retângulo, é bastante dividir a área pela base (ou pela altura) para calcular a outra dimensão.

Dois retângulos são ***iguais*** *quando, sendo superpostos, coincidem em tôda a sua extensão.*

Dois retângulos são ***eqüivalentes*** *quando têm a mesma área.* Assim os retângulos ABCD (fig. 4) e MNPR (fig. 5) são eqüivalentes porque têm a mesma área: 24cm^2.

Dois retângulos eqüivalentes nem sempre são iguais; mas, dois retângulos iguais são sempre eqüivalentes.

A ***igualdade*** de dois retângulos depende da ***forma*** destas figuras; a ***eqüivalência*** depende da ***área***.

Para calcular a área de um quadrado é bastante medir o comprimento de um de seus lados e multiplicar êste comprimento por si mesmo. Em outras palavras:

*A área de um quadrado é igual à **segunda potência** do número que representa a medida do lado do mesmo quadrado.*

Eis por que a *segunda potência* de um número é também chamada *quadrado dêste número.*

Representando a área de um quadrado por s e o lado por l, podemos estabelecer que: $s = l^2$

Exercícios. Série XLVI

Observação. Pedindo-se o comprimento de um segmento retilíneo, se êste não puder ser calculado exatamente, será sempre calculado com êrro inferior a um milímetro, salvo aviso em contrário.

1. O perímetro de um retângulo mede 436m. Calcular a área, sabendo-se que a diferença entre as duas dimensões é de 24m.

2. Calcular a área de um retângulo cujo perímetro mede 516m, sabendo-se que a diferença entre as duas dimensões é de 36m.

3. Calcular a área de um retângulo cujo perímetro mede 37,46m, sabendo-se que entre as duas dimensões do retangulo há uma diferença de 3,514m.

4. Um retângulo tem uma área de 47,5625m². O comprimento mede 9,32m. Calcular a largura.

5. A área de um retângulo é 56,374m². Medindo a largura 8,4m, calcular o comprimento.

6. Calcular o valor de um terreno retangular que mede 248m por 73m, admitindo-se que um hectare dêste terreno valha 4 360 cruzeiros.

7. Comprei um terreno retangular medindo 216,8m por 72,5m, pagando 6 300 cruzeiros por hectare. Por quanto devo vendê-lo para realizar um lucro de Cr$40,00 por centiare?

8. Um terreno retangular tem um perímetro de 745m. A diferença entre as duas dimensões do terreno é de 42m. Calcular o valor dêste terreno, admitindo-se que cada m² do mesmo valha Cr$48,50.

9. Uma mesa retangular mede 2,40m por 1,15m. Quero cobrí-la com um oleado o qual deve medir 0,45m mais que a mesa nos dois sentidos. Qual será a minha despesa, se cada metro quadrado de oleado custa Cr$6,40?

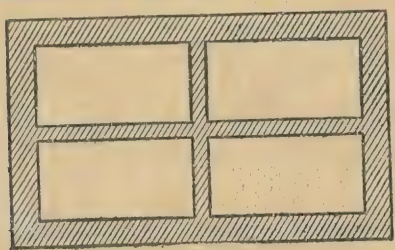


Fig. 6

10. O lado de um terreno quadrado mede 615m. Constroem-se casas ao longo do perímetro dêste terreno, ficando no interior do mesmo um grande quadrado reservado para uma praça de esportes, e cujos lados,

paralelos aos lados do quadrado primitivo, dêle distam 42m. Qual é a área desta praça?

11. Um jardim quadrado mede 124,56m de lado. É dividido em 4 quadrados iguais por duas avenidas perpendiculares entre si, e cuja largura mede 3,6m. Calcular a área de cada um dos quadrados.

12. Uma chácara retangular mede 148m por 84m. Em redor da chácara há um caminho interior com 2,4m de largura; (fig. 6) duas ruas perpendiculares entre si, também com 2,4m de largura, dividem a chácara em 4 partes iguais. Calcular a área da parte desta chácara destinada às plantações.

133. Área do paralelogramo. Consideremos o paralelogramo ABCD. ***Base de um paralelogramo é qualquer um de seus lados. Altura** de um paralelogramo é um segmento de reta, perpendicular à base e limitado por esta base e pela base oposta.*

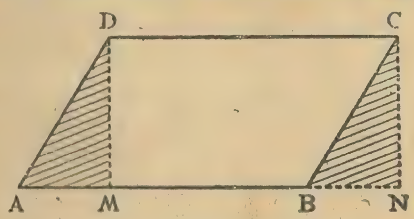


Fig. 7

No paralelogramo ABCD, tomando-se como base o lado AB, a altura pode ser o segmento DM ou o segmento CN, ou qualquer outro segmento perpendicular à base AB, traçado por qualquer ponto do lado CD ou dos prolongamentos dêste lado.

Dado o paralelogramo ABCD, tomemos como base o lado AB, e tracemos duas alturas, a saber: DM e CN. Formaremos assim o retângulo MNCD e dois triângulos: AMD e BNC. Se recortarmos o triângulo AMD e o colocarmos sôbre o triângulo BNC, veremos que êstes dois triângulos coincidem e são, portanto, iguais. Logo, podemos concluir que o paralelogramo ABCD e o retângulo MNCD são duas figuras eqüivalentes. Portanto,

área paralelogramo ABCD = área retângulo MNCD

Mas,

área retângulo MNCD = MN × DM

Logo,

área paralelogramo ABCD = MN × DM

Vamos agora mostrar que ***MN = AB.***

Com efeito, MN = MB + BN
AB = MB + AM

Mas, sendo BN = AM, resulta que MN = AB. E concluímos enfim que:

área paralelogramo ABCD = AB × DM

A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Representando a área de um paralelogramo por s, a base por b e a altura por h, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{s = b \times h}$$

Observação. As dimensões de um paralelogramo são a base e a altura.

Exercícios Série XLVII

1. Calcular em m^2, a área de um paralelogramo que mede 27,85dam de base e 8 156cm de altura.

2. A área de um paralelogramo é $36{,}54m^2$. A base mede 11,6m. Calcular a altura.

3. Um paralelogramo cujas base e altura medem respectivamente 13,6m e 7,25m é eqüivalente a um retângulo cuja altura mede 6,22m. Calcular a base do retângulo.

4. Calcular em ares a área de um terreno com a forma de um paralelogramo, e que mede 647,8m de base por 235,6m de altura.

134. Area do triângulo. Consideremos o triângulo ABC. Tomando-se como base o lado BC, a altura será o segmento AM. (fig. 8) Pelo vértice A tracemos uma paralela ao lado BC; pelo vértice C tracemos uma paralela ao lado AB (no triangulo da esquerda) e pelo vértice B tracemos uma paralela ao lado AC (no triânguio da direita) Estas paralelas se encontram num ponto

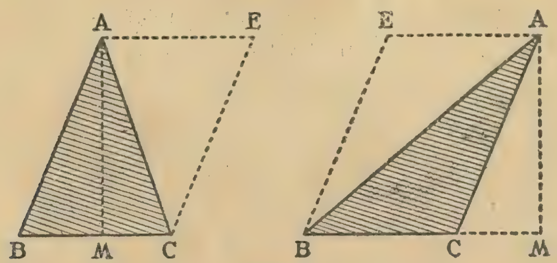


Fig. 8

E e, em qualquer dos dois casos formaremos um paralelogramo ABCE (ou AEBC) cuja base é BC e cuja altura é AM.

Isto pôsto, recortando o paralelogramo e, em seguida dividindo-o em duas partes, ao longo da diagonal AC (ou AB) verificaremos pela superposição que os triângulos ABC e ACE (ou ABC e AEB) são iguais. Ora, se a área do paralelogramo ABCE (ou AEBC) é igual ao produto da base BC pela altura AM, conclui-se que a área do triângulo ABC é igual à metade dêste produto. Portanto,

A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura do mesmo triângulo.

Representando a área de um triângulo por s, a base por b e a altura por h, podemos escrever:

$$s = \frac{bh}{2} \qquad s = \frac{b}{2} \times h \qquad s = b \times \frac{h}{2}$$

Sendo dadas a área e a base (ou a altura) de um triângulo, podemos calcular a altura (ou a base) de acôrdo com as seguintes fórmulas:

$$h = 2s \div b \qquad h = s \div \frac{b}{2}$$

$$b = 2s \div h \qquad b = s \div \frac{h}{2}$$

Exercícios orais

Calcular a área dos triângulos cujas bases e alturas medem respectivamente:

1. 7m e 4,6m	**3.** 12m e 3,6m	**5.** 6,5m e 8m
2. 4,2m e 5m	**4.** 10m e 5,4m	**6.** 9,4m e 6m

Nos exercícios que se seguem são dadas a área e uma das dimensões de um triângulo; calcular a outra.

7. $21m^2$ e 7m	**9.** $20m^2$ e 8m	**11.** $36m^2$ e 9m
8. $28m^2$ e 4m	**10.** $15m^2$ e 6m	**12.** $40m^2$ e 10m

Exercícios. Série XLVIII

1. Calcular a área de um triângulo com 36,7dam de base e 576dm de altura.

2. Calcular, em hectares, a área de um terreno triangular com 428,7m de base e 136,8m de altura.

3. Um triângulo, com uma área de $726{,}50m^2$ tem uma base que mede 31,6m. Calcular a altura.

4. A base de um triângulo mede 53,6m. Calcular a altura, sabendo-se que a área do triângulo é $3\,148{,}36m^2$.

5. Pedro tem um terreno triangular com 47,6m de base e 54,8m de altura, avaliado em Cr$ 4,40 por metro quadrado. Carlos tem um terreno retangular medindo 51,6m por 28,5m, avaliado em Cr$ 4,30 por metro quadrado. Os dois proprietários resolvem trocar seus terrenos. Calcular qual dos dois é o devedor, e de quanto.

6. Vendí um terreno triangular com 48,5m de base e 64,7m de altura, à razão de Cr$ 7,20 por metro quadrado. Com a importância recebida comprei um terreno retangular avaliado em Cr$ 8,50 por metro quadrado e com 33,6m de comprimento. Calcular a largura dêste terreno.

135. Area do losango. O losango é um paralelogramo e, portanto, podemos calcular a sua área, medindo a base e a altura e multiplicando os dois números obtidos. Entretanto, suas diagonais sendo perpendiculares entre si, e dividindo-se mùtuamente em partes iguais, vamos deduzir destas propriedades uma regra interessante para calcular a área dêste quadrilátero.

O losango ABCD (fig. 9) é constituído por dois triângulos, isto é, ABD e CBD. Podemos tomar como base de ambos, a diagonal BD. Sendo AC perpendicular a BD, a altura do triângulo ABD será AM, e a do triângulo CBD será CM.

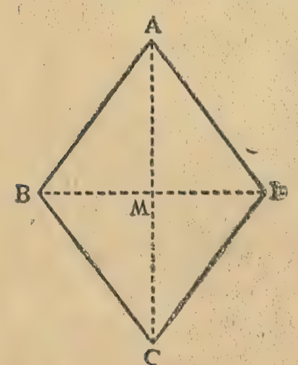


Fig. 9

Isto pôsto teremos:

área losango ABCD = *área triângulo* ABD + *área triângulo* CBD

$$= \frac{BD}{2} \times AM + \frac{BD}{2} \times CM$$

$$= \frac{BD}{2} \times (AM + CM)$$

$$= \frac{BD}{2} \times AC$$

$$= \frac{AC \times BD}{2}$$

Portanto, *a área de um losango é igual à metade do produto das suas diagonais.*

Representando a área do losango por **s**, a diagonal maior por **D** e a menor por **d**, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{s = \frac{D \times d}{2}}$$

Quando nos convier podemos escrever:

$s = \dfrac{D}{2} \times d$	$s = D \times \dfrac{d}{2}$

Conhecendo a área do losango e uma das diagonais, podemos calcular a outra, de acôrdo com as fórmulas seguintes:

$D = 2\,s \div d$	$d = 2\,s \div D$

Exercícios. Série XLIX

1. Calcular a área de um losango cujas diagonais medem 23,6m e 15,8m.

2. A soma das diagonais de um losango é 76,48m. Sua diferença é 15,24m. Calcular a área do losango.

3. A soma das diagonais de um losango é 123,4m. A diagonal maior contém 4 vêzes a menor. Calcular a área do losango.

4. A diagonal menor de um losango é a quinta parte da maior. A soma das duas é 73,44m. Calcular a área do losango.

5. A área de um losango é 7,4261m². Uma das diagonais mede 4,73m. Calcular a outra.

6. A área de um losango é 181,72m². Uma das diagonais mede 23,6m. Calcular a outra.

7. A área de um losango é 47,56m². Uma das diagonais mede 14,3m. Calcular a outra.

8. A área de um losango é 3,5624m². Uma das diagonais mede 3,12m. Calcular a outra.

9. Os vitrais de um edifício são formados por 3 472 losangos, cujas diagonais medem 0,18m e 0,12m. Calcular a área total dos vitrais.

10. Para pavimentar um vestíbulo com 5,40m de comprimento, foram necessários 1 350 losangos cujas diagonais medem 0,24m e 0,15m. Calcular a largura do vestíbulo.

11. Na pavimentação de um corredor foram empregados 725 losangos cujas diagonais medem 0,26m e 0,15m. Um cento de ladrilhos custa 72 cruzeiros e o operário ganha 15 cruzeiros por m² de pavimentação. Qual foi a despesa total?

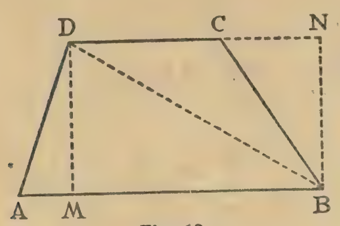


Fig. 10

136. Area do trapézio. Neste quadrilátero, sòmente dois lados opostos são paralelos; os lados AB e CD. (fig. 10)

Base *de um trapézio é um dos lados paralelos:* AB *ou* CD. Êstes dois lados sendo sempre diferentes, diremos que AB é a ***base maior*** e CD, a ***base menor.***

Altura *de um trapézio é um segmento perpendicular às bases e limitado por elas.* No trapézio ABCD a altura é o segmento DM ou o segmento BN. Com efeito, a figura BNDM é um retângulo; portanto, MD = BN.

Vejamos agora como se calcula a área de um trapézio. Traçando-se a diagonal BD, o trapézio ABCD fica dividido em dois triângulos: os triângulos ABD e BCD. Ora:

$$\textit{área trapézio } \mathrm{ABCD} = \textit{área triângulo } \mathrm{ABD} + \textit{área triângulo } \mathrm{BCD}$$

$$= \frac{\mathrm{AB}}{2} \times \mathrm{DM} + \frac{\mathrm{CD}}{2} \times \mathrm{BN}$$

Porém, sendo DM = BN, podemos escrever:

$$\textit{área do trapézio } \mathrm{ABCD} = \frac{\mathrm{AB}}{2} \times \mathrm{DM} + \frac{\mathrm{CD}}{2} \times \mathrm{DM}$$

$$= \left(\frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\mathrm{CD}}{2}\right) \times \mathrm{DM} = \frac{\mathrm{AB}+\mathrm{CD}}{2} \times \mathrm{DM}$$

Portanto, *a área de um trapézio é igual à semisoma das bases, multiplicada pela altura.*

Representando a área de um trapézio por ***s***, a base maior por ***B***, a menor por ***b*** e a altura por ***h***, podemos estabelecer a seguinte fórmula.

$$\boxed{s = \frac{B + b}{2} \times h}$$

Exercícios. Série L

1. Calcular a área de um trapézio com 0,74m de altura, e cujas bases medem 3,7m e 2,54m.

2. Um terreno tem a forma de um trapézio, cujas bases medem 342m e 258m. A altura mede 135m. Calcular o valor dêste terreno, supondo-se que um m^2 valha Cr$ 12,00.

3. Um terreno tem a forma de um trapézio. Suas bases medem 148m e 96m; a altura mede 64m. Êste terreno foi avaliado em Cr$ 80 000,00. Calcular o preço de um metro quadrado.

4. Um campo em forma de trapézio tem 54m de altura. Suas bases medem 136m e 72m. Supondo-se que êste terreno possa produzir 625 litros de trigo, por are, calcular o valor da colheita, admitindo-se que um litro de trigo custe Cr$ 1,20.

5. A área de um trapézio é de $529{,}48m^2$. A altura mede 12,4m. Calcular as duas bases, sabendo-se que sua diferença é 5,8m.

Sugestão. $\frac{B+b}{2} = s \div h \;\therefore\; B + b = 2(s \div h)$

6. Um trapézio, com uma área de $643{,}56m^2$, tem 15m de altura. Calcular as duas bases, sabendo-se que sua diferença é de 6,4m.

137. Area do círculo. *Para calcular a área de um círculo, multiplica-se o quadrado do raio pelo número π.*

Observação. π, letra grega que se lê *pi*, representa o número 3,14.

Consideremos a circunferência do centro O e raio OA. O raio desta circunferência mede 0,2m. Para calcular a área do círculo, é bastante elevar 0,2 ao quadrado, e multiplicar o resultado por 3,14. Teremos:

$0{,}2^2 \times 3{,}14 = 0{,}04 \times 3{,}14 = 0{,}125\,6$

Portanto, a área da figura 11 é $12dm^2$ e $56cm^2$.

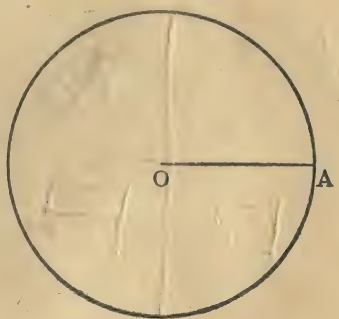


Fig. 11

Representando a área de um círculo por s e o raio por r, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{s = \pi r^2}$$

Exercícios. Série LI

1. Calcular a área de um círculo cujo raio mede 3,16m.

2. Calcular a área de um círculo cujo diâmetro mede 7,28m.

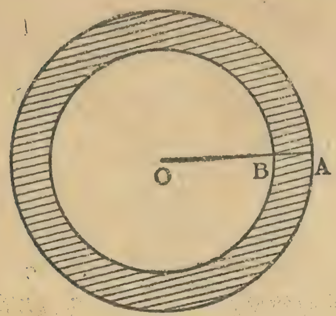


Fig. 12

3. Calcular a área de uma coroa, sabendo-se que o raio da circunferência maior mede 4,15m e o da menor, 3,75m.

Observação. *Duas circunferências são concêntricas quando têm o mesmo centro.*

Coroa *é a porção de superfície plana limitada por duas circunferências concêntricas.* (fig. 12)

4. Um tanque circular cujo raio mede 7,2m é cercado por um passeio cuja largura mede 1,2m. Qual é a área deste passeio?

5. O lado de um terreno quadrado mede 31,2m. No interior dêste terreno há um lago cujo diâmetro mede 16,2m. Calcular a área livre dêste terreno.

6. Um retângulo mede 31,6m por 23,2m. Tira-se de cada canto do retângulo um quadrante (a quarta parte de um círculo) cujo raio mede 2,5m. Qual é a área que resta para o retângulo? (fig. 13)

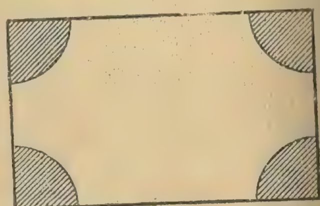


Fig. 13

138. O volume de um corpo. (*) Medir um segmento de reta é verificar quantas vêzes êste segmento contém outro tomado como unidade. O segmento tomado como unidade é, em geral, o metro, e desta comparação resulta um número que é o ***comprimento do segmento.***

Medir uma porção limitada de superfície, uma superfície fechada, é verificar quantas vêzes esta superfície limitada contém outra superfície também limitada e tomada como unidade. A superfície limitada tomada como unidade é, em geral, o metro quadrado, e desta comparação resulta um número que é a *área* da superfície limitada.

Medir o volume de um corpo é verificar quantas vêzes o volume dêste corpo contém outro volume tomado como unidade. Mas, qual é o volume que deve ser tomado como unidade? Para avaliar o volume de uma viga ou de uma pilha de tijolos, qual é o volume que devemos tomar como unidade? Se nos disserem que o volume de um obelisco contém 240 vêzes o volume de

(*) De acôrdo com o decreto n.º 4.257, de 16/6/1939 que estabeleceu o "Sistema Legal de Unidades de Medir" a ser adotado no Brasil, existem duas unidades legais de volume: *o metro cúbico* e o *litro*. Neste parágrafo e seguintes, até o § 146, trataremos do metro cúbico.

um cubo, é claro que não podemos fazer idéia do volume do obelisco, porque há cubos de todos os tamanhos, e nós não conhecemos o tamanho do tal cubo que cabe 240 vêzes no obelisco. Precisamos, pois, escolhêr uma unidade de volume que todos conheçam.

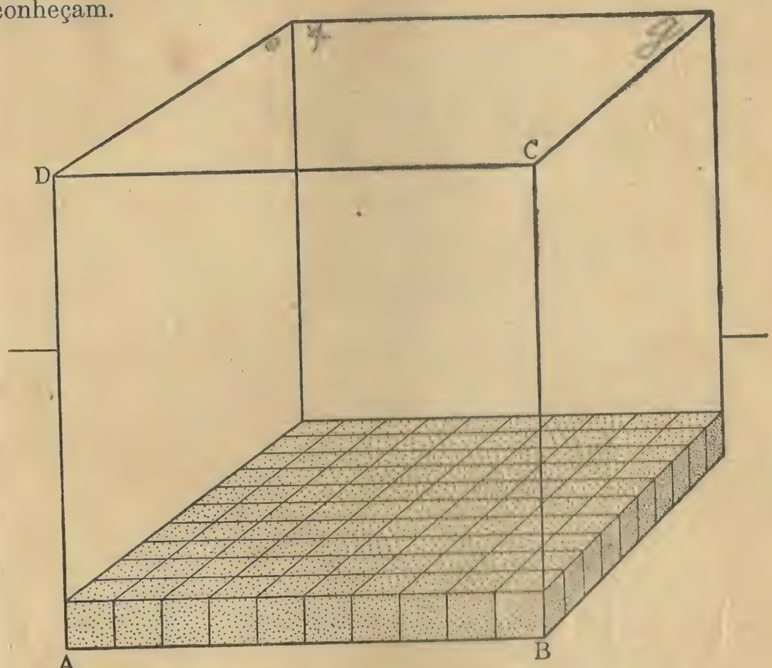


Fig. 14

139. O cubo; o decímetro cúbico e o centímetro cúbico. Suponhamos que a aresta AB do cubo (fig. 14) mede ***um decímetro.*** Neste caso, qualquer uma das faces do cubo, por exemplo, a face ABCD, é ***um decímetro quadrado.*** E diremos, então, que o cubo representado pela figura 14 é ***um decímetro cúbico.***

O decímetro cúbico é um cubo cujas arestas têm um decímetro de comprimento. Cada face do decímetro cúbico é um decímetro quadrado.

E, como nós temos uma noção exata do decímetro e do decímetro quadrado, estamos em condições de ter também uma noção exata do decímetro cúbico. E se nos disserem que uma pedra tem um volume de 5 decímetros cúbicos, podemos ter uma idéia exata da ***extensão*** desta pedra. Portanto, o decímetro cúbico é uma unidade de volume. Mas não é a única, como veremos adiante.

Continuemos a examinar o cubo representado pela figura 14. É um decímetro cúbico. Cada uma de suas faces é um decímetro quadrado. Cada uma de suas arestas é um decímetro linear ou simplesmente um decímetro. A aresta AB está dividida em 10 partes iguais; logo, cada uma destas partes é um centímetro. E, supondo que a figura 14 represente uma caixa, cujo volume é de um decímetro cúbico, o que nós estamos vendo no fundo desta caixa são 100 pequenos cubos, dispostos em 10 linhas, cada uma das quais tem 10 cubos. A face de cada um dêstes cubos é um centímetro quadrado, porque estas faces são quadrados cujos lados medem um centímetro. Cada um dêstes pequenos cubos ***é um centímetro cúbico.***

O centímetro cúbico é um cubo cujas arestas têm um centímetro de comprimento. Cada face do centímetro cúbico é um centímetro quadrado.

E como nós temos uma noção exata do centímetro e do centímetro quadrado, estamos também em condições de ter uma noção exata do centímetro cúbico. E se nos disserem que um cristal tem um volume de 4 centímetros cúbicos, podemos ter uma idéia exata da extensão dêste cristal. Portanto, o centímetro cúbico é também uma unidade de volume. Mas ainda há outras.

Voltemos à figura 14. Continuemos a imaginar que esta figura representa uma caixa, cujo volume é de um decímetro cúbico. No fundo desta caixa estamos vendo uma camada constituída por 100 centímetros cúbicos. Ora, é evidente que, se quisermos encher a caixa com centímetros cúbicos, precisamos de mais nove camadas de centímetros cúbicos iguais à que está no fundo da caixa. Portanto, esta caixa contém 10×100 centímetros cúbicos ou 1 000 centímetros cúbicos, isto é:

1 decímetro cúbico = 1 000 centímetros cúbicos

140. O metro cúbico. Se cada aresta do cubo representado pela figura 14 tivesse um metro de comprimento, cada uma de suas faces seria um metro quadrado e a figura 14 representaria um metro cúbico. Portanto, ***o metro cúbico é um cubo cujas arestas têm um metro de comprimento.*** Mas, se a figura 14 representar um metro cúbico, os 100 cubos que estão situados no fundo dêste metro cúbico serão decímetros cúbicos. E chegaremos facilmente à conclusão que um metro cúbico tem 1 000 decímetros cúbicos. ***O metro cúbico é a primeira unidade legal de volume.***

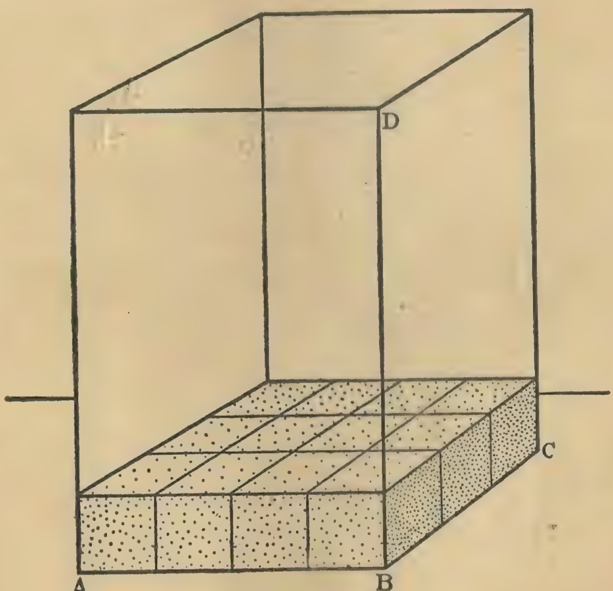


Fig. 15

141. Volume do bloco retangular. A figura 15 representa um bloco retangular cujas três dimensões, BA, BC e BD, medem respectivamente 4cm, 3cm e 6cm. Suponhamos que êste bloco representa uma caixa vazia que nós queremos encher com dados, cada um dos quais seja exatamente *um centímetro cúbico.*

É fácil compreender que a primeira camada de dados será constituída por 4×3 ou 3×4 dados, isto é, 12 dados. E observando-se que, para encher esta caixa são necessárias 6 camadas, cada uma com 12 dados, conclui-se que o número total de dados, que esta caixa contém é $4 \times 3 \times 6$ ou $3 \times 4 \times 6$ dados. Cada um dos dados sendo um centímetro cúbico, diremos que o ***volume dêste bloco é 72 centímetros cúbicos.***

Para maior clareza, apresentamos, subdividido em quatro porções (fig. 16) o mesmo bloco retangular ABCD (fig. 15) para que se veja que êle contém realmente 72 centímetros cúbicos.

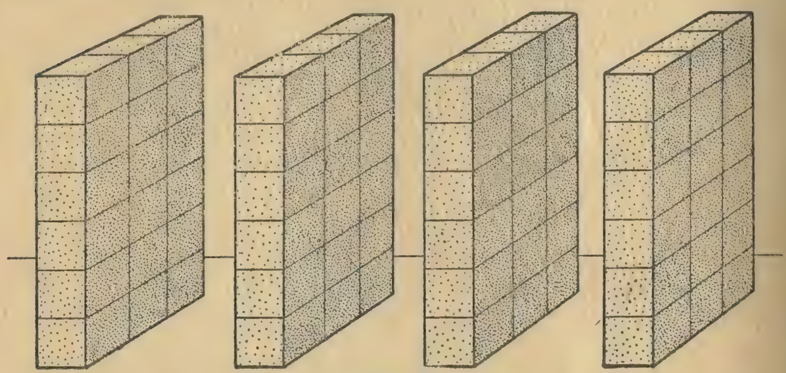


Fig. 16

Se as dimensões de um bloco retangular são 5cm, 6cm e 8cm, um raciocínio análogo nos mostrará que o volume do bloco é $5 \times 6 \times 8 = 240$ centímetros cúbicos. Sendo 4dm, 5dm e 10dm, o volume será 200 decímetros cúbicos. Sendo 7m, 4m e 11m, o volume será 308 metros cúbicos. Podemos pois estabelecer a seguinte

Regra. *Para calcular o volume de um bloco retangular, é bastante calcular o produto das suas três dimensões, medidas com a mesma unidade de comprimento.*

E, se observarmos que o produto das dimensões BA e BC do bloco representa a área da base do mesmo bloco, concluiremos que:

O volume de um bloco retangular é igual ao produto da área da base do bloco pela altura do mesmo bloco.

Convém não esquecer que:

m × m × m	= *metros cúbicos*
dm × dm × dm	= *decímetros cúbicos*
cm × cm × cm	= *centímetros cúbicos*

142. Volume do cubo. Considerando a fig. 14 (§139) e supondo que a aresta dêste cubo meça 10 centímetros, já vimos que êste cubo pode conter 1 000 centímetros cúbicos. E diremos que o volume dêste cubo é 1 000 centímetros cúbicos.

Supondo que a aresta de um cubo meça 6 centímetros, e raciocinando como no parágrafo anterior, facilmente concluiremos que o volume do cubo é $6 \times 6 \times 6 = 216$ centímetros cúbicos.

Se a aresta medir 5 decímetros, o volume do cubo será $5 \times 5 \times 5 = 125$ decímetros cúbicos. E assim por diante. Portanto,

Regra. *Para calcular o volume de um cubo, mede-se o comprimento de uma das arestas, e eleva-se êste comprimento à terceira potência. O resultado representa o volume do cubo, em cubos cuja aresta é igual à unidade de comprimento que foi escolhida para medir a aresta do cubo.*

Exercícios em classe

1. Desenhar um cubo cuja aresta tenha 6cm. Quantos cm quadrados contém cada uma das faces? Quantos cm cúbicos contém êste cubo?
2. Desenhar um cubo cuja aresta tenha 7cm. Quantos cm quadrados contém cada uma das faces? Quantos cm cúbicos contém êste cubo?
3. Vejo uma pedra de forma cúbica, cuja aresta mede 8dm. Quantos dm quadrados contém cada uma de suas faces? Quantos dm cúbicos de pedra podem ser feitos com esta pedra?
4. A nossa sala de aula tem a forma de um cubo. O comprimento da sala é de 9 metros. Qual é a largura? Qual é a altura? Quantos metros quadrados contém o assoalho? E o fôrro? E cada uma das paredes? Qual é a superfície da sala? Qual é o volume da sala?

143. O volume é uma grandeza composta. O volume é uma grandeza composta. (§123) Com efeito, êle é o produto de três comprimentos, isto é, as três dimensões de um bloco retangular ou de um cubo; é também o produto de uma área retangular por um comprimento, isto é, a área da base de um bloco retangular ou de um cubo, pela altura do mesmo bloco ou cubo.

A medição direta de um volume é uma operação dificílima, senão impossível. A nossa sala de aula tem a forma de um bloco retangular. Se quiséssemos medir diretamente o volume da nossa sala, deveríamos enchê-la com metros cúbicos feitos de madeira ou de qualquer outra substância e, depois, contar êstes cubos. É fácil de perceber a dificuldade dêste processo de medir.

144. As unidades de volume. As unidades legais das medidas de volume são o metro cúbico e o litro. O metro cúbico é a primeira unidade legal de volume; seus múltiplos e submúltiplos usuais são as unidades secundárias.

MÚLTIPLOS	quilômetro cúbico	(km^3)	=	$1\,000\,000\,000m^3$
	hectômetro cúbico	(hm^3)	=	$1\,000\,000m^3$
	decâmetro cúbico	(dam^3)	=	$1\,000m^3$
UNIDADE	metro cúbico	(m^3)	=	$1m^3$
SUBMÚLTIPLOS	decímetro cúbico	(dm^3)	=	0,001 do m^3
	centímetro cúbico	(cm^3)	=	0,000001 do m^3
	milímetro cúbico	(mm^3)	=	0,000000001 do m^3

(G)

O quadro G contém a primeira unidade legal de volume com seus múltiplos e submúltiplos usuais, as suas abreviaturas e os seus valores em relação ao metro cúbico.

Se um m^3 tem $1\,000dm^3$, então $1dm^3$ é a milésima parte do m^3. Consideremos o número 3,478 (3 unidades e 478 milésimos). Escrevendo o símbolo m^3 à direita dêste número, teremos $3{,}478m^3$, isto é, $3m^3$ e 478 milésimos do m^3. Mas, milésimos do m^3 são dm^3. Então $3{,}478m^3$ significa $3m^3$ e 478 dm^3. Seja o número $7{,}8m^3$. Escrevendo dois zeros à direita da parte fracionária, êste número não se altera. Portanto, $7{,}8m^3 = 7{,}800m^3 = 7m^3$ e $800dm^3$. Do mesmo modo, $4{,}57m^3 = 4{,}570m^3 = 4m^3$ e $570dm^3$.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^3, escrever os volumes seguintes:

1. $3m^3$ e $7dm^3$
2. $2dm^3$
3. $48dm^3$
4. $359dm^3$
5. $647dm^3$
6. $9m^3$ e $40dm^3$
7. $2m^3$ e $34dm^3$
8. $4\,578dm^3$
9. $7m^3$ e $6dm^3$
10. $45dm^3$
11. $7m^3$ e $8dm^3$
12. $4m^3$ e $37dm^3$

Ler de todos os modos possíveis, os volumes seguintes:

13. $4{,}537m^3$	**15.** $0{,}089m^3$	**17.** $0{,}293m^3$	**19.** $8{,}7m^3$
14. $6{,}259m^3$	**16.** $0{,}546m^3$	**18.** $7{,}48m^3$	**20.** $3\,456dm^3$

Um $m^3 = 1\,000dm^3$; um $dm^3 = 1\,000cm^3$; logo $1m^3 = 1\,000\,000cm^3$. Então, ***1cm³ é a milionésima parte do m³.***

Consideremos o número 3,578 946 (3 unidades, 578 milésimos e 946 milionésimos). Escrevendo o símbolo m^3 à direita dêste número, teremos $3\,578\,946m^3$, isto é, $3m^3$, 578 milésimos do m^3 e 946 milionésimos do m^3. Mas, milésimos do m^3 são dm^3 e milionésimos do m^3 são cm^3. Então, $3{,}578\,946m^3$ significa $3m^3$, $578dm^3$ e $946cm^3$.

Exercícios em classe

1. $25cm^3$	**4.** $5m^3$ e $647cm^3$	**7.** $47\,895cm^3$
2. $248cm^3$	**5.** $31dm^3$ e $58cm^3$	**8.** $7m^3$ e $42cm^3$
3. $3\,796cm^3$	**6.** $4m^3$, $10dm^3$ e $8cm^3$	**9.** $1m^3$, $2dm^3$ e $4cm^3$

Ler de todos os modos possíveis, os volumes seguintes:

10. $3{,}476\,870m^3$	**12.** $0{,}073\,56m^3$	**14.** $0{,}000\,2m^3$
11. $5{,}607\,080m^3$	**13.** $0{,}124\,85m^3$	**15.** $0{,}007\,8m^3$

Um $m^3 = 1\,000\,000\,000$ de mm^3. Logo, ***1mm³ é a bilionésima parte do m³.*** Consideremos o número 7,345 678 219. (7 unidades, 345 milésimos, 678 milionésimos e 219 bilionésimos). Escrevendo o símbolo m^3 à direita dêste número, teremos $7{,}345\,678\,219m^3$, isto é, $7m^3$, 345 milésimos do m^3, 678 milionésimos do m^3 e 219 bilionésimos do m^3. Mas, milésimos do m^3 são dm^3, milionésimos do m^3 são cm^3 e bilionésimos do m^3 são mm^3. Então, $7{,}345\,678\,219m^3$ significa $7m^3$, $345dm^3$, $678cm^3$ e $219mm^3$.

Exercícios em classe

Tomando como unidade o m^3, escrever os volumes seguintes:

1. $1mm^3$	**4.** $5\,789mm^3$	**7.** $8m^3$ e $542mm^3$
2. $14mm^3$	**5.** $43\,518mm^3$	**8.** $432m^3$ e $37mm^3$
3. $387mm^3$	**6.** $74\,cm^3$ e $36mm^3$	**9.** $1dm^3$, $2cm^3$ e $5mm^3$

10. Ler de todos os modos possíveis o número $7{,}528\,437\,619m^3$.

Consideremos o número 4,123 456 789. Escrevendo o símbolo m^3 à direita dêste número, teremos $4{,}123\,456\,789m^3$. E de tudo o que dissemos neste parágrafo resulta que:

$$
\begin{aligned}
4{,}123\,456\,789m^3 &= 4m^3 + 123dm^3 + 456cm^3 + 789mm^3 \\
3{,}246\,813\,57m^3 &= 3m^3 + 246dm^3 + 813cm^3 + 570mm^3 \\
2{,}410\,529\,6m^3 &= 2m^3 + 410dm^3 + 529cm^3 + 600mm^3 \\
5\,643\,728m^3 &= 5m^3 + 643dm^3 + 728cm^3 \\
6{,}238\,57m^3 &= 6m^3 + 238dm^3 + 570cm^3 \\
7{,}963\,2m^3 &= 7m^3 + 963dm^3 + 200cm^3 \\
2{,}528m^3 &= 2m^3 + 528dm^3 \\
3{,}47m^3 &= 3m^3 + 470dm^3 \\
6{,}8m^3 &= 6m^3 + 800dm^3
\end{aligned}
$$

145. Mudança de unidade nas medidas de volume. A unidade de volume pode ser qualquer; o m^3, o dm^3, o cm^3, etc.: Escolhe-se a unidade de acôrdo com o corpo cujo volume se quer medir.

unidades	milésimos	milionésimos	bilionésimos
3,	527	489	632
m^3	dm^3	cm^3	mm^3

(H)

As conclusões a que chegámos no parágrafo anterior podem ser resumidas no quadro H.

Nos números que representam volumes, a unidade escolhida é representada pela abreviatura corrsepondente.

Consideremos 3,457 8m^3. Escrevendo dois zeros à direita, e de acôrdo com o quadro H, êste número contém 3m^3, 457dm^3 e 800cm^3. E, de acôrdo com os princípios da numeração, 3,4578m^3 = 3 457,800dm^3 = 3 457 800cm^3 = 3 457 800 000mm^3.

Exercícios orais

Reduzir os volumes que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 4m^3 (dm^3)
2. 7m^3 (cm^3)
3. 9m^3 (mm^3)
4. 4dm^3 (mm^3)
5. 6dm^3 (cm^3)
6. 9cm^3 (mm^3)
7. 0,8m^3 (dm^3)
8. 0,47m^3 (dm^3)
9. 0,428m^3 (dm^3)
10. 0,6m^3 (cm^3)
11. 0,45m^3 (cm^3)
12. 0,376m^3 (cm^3)
13. 0,4dm^3 (cm^3)
14. 7,6dm^3 (cm^3)
15. 12,3dm^3 (cm^3)
16. 0,48dm^3 (cm^3)
17. 0,259dm^3 (cm^3)
18. 0,63dm^3 (cm^3)
20. 4,26m^3 (cm^3)
21. 0,4m^3 (mm^3)
21. 0,4m^3 (mm^3)
22. 0,52m^3 (mm^3)
23. 0,8dm^3 (cm^3)
24. 0,56dm^3 (mm^3)
25. 0,87cm^3 (mm^3)
26. 3m^3 (mm^3)
27. 0,8dm^3 (mm^3)
28. 9cm^3 (mm^3)
29. 7,6m^3 (dm^3)
30. 6,9dm^3 (cm^3)
31. 0,498 357 m^3 (dm^3)
32. 427 859 628mm^3 (dm^3)
33. 345 678 916cm^3 (m^3)
34. 12 830 720cm^3 (dm^3)

146. Os múltiplos do metro cúbico. Muito raramente são empregados na vida prática, porque o metro cúbico é uma unidade suficiente para medir os grandes volumes.

O dam^3 é um cubo cujas faces são decâmetros quadrados; logo, as arestas têm um decâmetro de comprimento. A figura 14 do parágrafo 139 mostra com facilidade que 1dam^3 = 1 000m^3. É bastante supor que a aresta AB tenha um decâmetro de comprimento. Portanto, 1dam^3 contém um milhar de metros cúbicos. Então, considerando o número 4 358m^3, o algarismo 4 reprsenta dam^3, e 4 358m^3 = 4dam^3 e 358m^3.

O hm^3 é um cubo cujas faces são hectômetros quadrados; logo, as arestas têm um hectômetro de comprimento. A mesma figura mostra com facilidade que $1hm^3 = 1\,000dam^3$. É bastante supor que a aresta AB tenha um hectômetro de comprimento. Portanto, $1hm^3$ contém $1\,000dam^3$. E sendo $1dam^3 = 1\,000m^3$, segue-se que $1hm^3 = 1\,000\,000m^3$. Então, $7\,548\,329m^3 = 7hm^3$, $548dam^3$ e $329m^3$. E assim por diante.

Exercícios orais

Reduzir os volumes que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. $3dam^3$ (m^3)
2. $4{,}7dam^3$ (m^3)
3. $5{,}84dam^3$ (m^3)
4. $8{,}567dam^3$ (m^3)
5. $3dam^3$ (dm^3)
6. $7dam^3$ (dm^3)
7. $3{,}6dam^3$ (dm^3)
8. $3\,468m^3$ (dam^3)
9. $478\,546m^3$ (dam^3)
10. $3{,}48m^3$ (dm^3)
11. $7hm^3$ (m^3)
12. $8{,}47dam^3$ (m^3)
13. $9{,}56hm^3$ (dam^3)
14. $6{,}83hm^3$ (m^3)
15. $7{,}46m^3$ (dam^3)
16. $2{,}48m^3$ (dm^3)
17. $7{,}59dam^3$ (m^3)
18. $12{,}568hm^3$ (dam^3)
19. $1\,234\,567m^3$ (dam^3)
20. $45\,897dam^3$ (hm^3)

Exercícios. Série LII

Problemas sôbre medidas de volume

Não esquecer que:

$m \times m = m^2$
$m^2 \div m = m$
$dm \times dm = dm^2$
$dm^2 \div dm = dm$

$m \times m \times m = m^3$
$m^3 \div m^2 = m$
$m^3 \div m = m^2$

$dm \times dm \times dm = dm^3$
$dm^3 \div dm^2 = dm$
$dm^3 \div dm = dm^2$

O produto de dois comprimentos é uma área. O produto de três comprimentos é um volume. O produto de uma área por um comprinento é um volume. O quociente da divisão de uma área por um comprimento é um comprimento. O quociente da divisão de um volume por uma área é um comprimento.

1. Reduzir $7{,}4m^3 + 34{,}58dm^3 + 7{,}826dam^3 + 345\,678dm^3 + 0{,}819m^3 + 407\,586\,000mm^3$ a dm^3.
2. Calcular o volume de uma sala que tem 9,5m de comprimento 7,4m de largura e 4,36m de altura.
3. Calcular o volume de um cubo cuja aresta mede 4,13m.
4. Calcular o volume de um cubo cuja aresta mede 8,25m.
5. Quanto vale um bloco de granito de forma cúbica, cuja aresta mede 1,26m, supondo-se que o decímetro cúbico do granito se possa vender a Cr$ 0,45?
6. Calcular em dm^3 o volume de um bloco retangular cujas dimensões são 4,5m, 2,4m e 1,3m.
7. Calcular em cm^3 o volume de um tijolo cujas dimensões são 0,32m, 0,15m e 0,08m.

8. Uma tôrre com 36,4m de altura tem a forma de um bloco retangular. A base da tôrre mede 11,6m de comprimento por 8,4m de largura. Calcular a área da base da tôrre; a área lateral; a área total; o volume.

9. Calcular o volume de uma parede com 14m de comprimento, 34dm de altura e 33cm de espessura.

10. Quantos tijolos serão necessários para construir uma parede com 15,8m $\times$ 4,3m $\times$ 0,35m, se as dimensões do tijolo são 0,30m, 0,15m e 0,08m? Se os tijolos custam Cr$ 84,00 por milheiro, e se o operário ganha Cr$ 8,60 por metro quadrado da parede construída, qual será o custo desta parede?

11. Uma sala de aula mede 18,5m$\times$13,4m$\times$5,2m. Supondo-se que cada aluno necessite de um espaço igual a 4,8m^3 para respirar à vontade, quantos alunos pode conter esta sala?

12. Calcular a área lateral, a área total e o volume de uma viga que mede 4,5 $\times$ 0,33m $\times$ 0,06m. As bases da viga são as extremidades.

13. Quantos m^3 de pedra são necessários para fechar com uma parede de 2,4m de altura e 0,3m de espessura, um terreno retangular que mede 87m por 57m?

14. Calcular o volume e a área total de um cubo cuja aresta tem 2,7m.

15. Calcular o volume e a área total de um cubo cuja aresta tem 5,2m.

16. A soma dos comprimentos das arestas de um cubo é igual a 40,8m. Calcular a área de cada uma das faces e o volume do cubo.

17. A área total de um cubo é igual a 162,24m^2. Calcular o comprimento da aresta e o volume do cubo.

18. Um reservatório de forma cúbica tem uma profundidade de 2,4m. Quanto custará a pintura interior e exterior dêste reservatório, a Cr$ 3,40 por metro quadrado? Supõe-se que o reservatório é aberto na parte superior.

19. Um reservatório mede 7,8m de comprimento, 6,4m de largura e 3,5m de profundidade. Não está cheio, faltando ainda 48cm para que a água chegue a transbordar. Quantos dm^3 de água contém êste reservatório?

20. Um bloco de granito mede 8,4m $\times$ 6,7m $\times$ 3,5m. Quebra-se êste bloco para empregá-lo na construção de uma estrada. O granito, depois de partido, aumenta de 0,24 do seu volume. As dimensões do caminhão empregado no transporte são 2m, 1,3m e 0,45m. Cada viagem do caminhão custa Cr$ 8,00. Quanto custará o transporte de todo o granito?

21. Cavou-se um fosso com 48m de comprimento, 7,4m de largura e 3,25 de profundidade. A terra foi conduzida a um lugar distante, em um caminhão cujas dimensões são 1,9m, 1,2m e 0,44m. Sabendo-se que a terra, depois de revolvida, aumenta de 0,15 do seu volume, calcular o custo do transporte de tôda a terra, custando Cr$ 6,20 cada viagem do caminhão.

22. Suponha-se que a terra sôlta, depois de comprimida, perde 0,12 do seu volume. Quantos metros cúbicos de terra serão necessários para encher um fosso com 27m de comprimento, 8,4m de largura e 3,6m de profundidade?

23. O vólume de um bloco retangular é de 74,850m^3. As dimensões da base são 4,8m e 5,2m. Calcular a altura do bloco com êrro inferior a 0,001m.

24. Uma viga tem 0,24m de largura e 0,06 de espessura. Sendo o volume da viga igual a 347dm^3, pede-se o comprimento da mesma com êrro inferior a 0.01m.

25. Uma tôrre cuja forma é a de um bloco retangular tem 42m de altura e 1 350m³ de volume. A base da tôrre é um retângulo cujo comprimento é de 7,5m. Pede-se a largura dêste retângulo com êrro inferior a 0,01m.

26. A área lateral de um bloco retangular é de 46,50m². As bases do bloco são quadrados, cujos lados medem 3,1m cada um. Pede-se a altura do bloco e o seu volume.

27. Um pilar em forma de bloco retangular, com 7,4m×0,45m×0,45m, é construído com tijolos de 24cm×13cm×5cm. A argamassa necessária para ligar os tijolos ocupa um volume igual a 0,23 do volume do pilar. Calcular o custo dos tijolos empregados na construção do pilar, a Cr$ 75,00 por milheiro.

28. Um terreno retangular mede 436m×235m. Abrem-se neste terreno duas ruas perpendiculares entre si, uma no sentido do comprimento e outra no sentido da largura. A rua mais comprida tem 15m de largura e a mais curta, 12m. Cobrem-se as duas ruas com uma camada de areia de 12cm de espessura. Calcular o custo da areia à razão de Cr$ 3,70 por metro cúbico.

29. Um terreno retangular tem 3 840 metros de perímetro e seu comprimento é o triplo da largura. Cava-se um fosso ao longo do perímetro dêste terreno, com 2,4m de largura e 0,8m de profundidade, pagando-se Cr$ 4,20 por metro cúbico da terra retirada. Calcular o custo dêste trabalho.

30. Um terreno retangular mede 53m × 31m. No centro dêste terreno abre-se um tanque com 7,5m × 6,4m × 3,8m. A terra retirada dêste tanque é espalhada sôbre o mesmo terreno, de um modo uniforme. Qual será a altura desta camada?

147. O litro. A segunda unidade legal de volume é o *litro*, cujo símbolo é ***l***. O litro com seus múltiplos e submúltiplos usuais é usado no comércio, para a compra e venda dos chamados *sêcos e molhados*, isto é, arroz, farinha, feijão, batatas, leite, vinho, azeite, gasolina, etc.. É a unidade empregada para medir a *capacidade*, isto é, o volume útil ou utilizável de recipientes quaisquer como sejam reservatórios, tanques, garrafas, etc.. Eis porque esta segunda unidade legal é conhecida como ***unidade de capacidade.***

MÚLTIPLOS	hectolitro	(hl)	=	100 litros	
	decalitro	(dal)	=	10 litros	
UNIDADE	litro	(l)	=	1 litro	(J)
SUBMÚLTIPLOS	decilitro	(dl)	=	0,1 do litro	
	centilitro	(cl)	=	0,01 do litro	
	mililitro	(ml)	=	0,001 do litro	

centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos
2	3	5,	3	6	9
hl	dal	l	dl	cl	ml

(K)

Imaginemos uma caixa de latão, de forma cúbica e cujo volume interior seja de $1dm^3$. Se enchermos esta caixa com água, a quantidade dêste líquido é aproximadamente um litro.

Definição. *O litro é o volume de um quilograma de água distilada e isenta de ar, à temperatura de 4 graus centígrados, e sob a pressão atmosférica normal.*

Para fins legais admite-se que:

Um litro é eqüivalente a um decímetro cúbico.

Tudo o que dissemos em relação ao metro, se aplica sem restrições às medidas de capacidade. É bastante substituir o quadro A pelo quadro J, o quadro B pelo quadro K, e a palavra *comprimento* pela palavra *capacidade.*

Devemos também observar qua as unidades de volume crescem ou decrescem de 1 000 em 1 000, ao passo qua as unidades de capacidade crescem ou decrescem de 10 em 10. Assim é que:

$$1m^3 = 1\,000dm^3 = 1\,000\,000cm^3 = 1\,000\,000\,000mm^3$$

$$1 \text{ litro} = 10 \text{ decilitros} = 100 \text{ centilitros} = 1\,000 \text{ mililitros.}$$

Exercícios orais

Reduzir as capacidades que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 1dal (l)
2. 3,7l (dl)
3. 3,7dal (l)
4. 4,8dal (l)
5. 5,7l (cl)
6. 9,3hl (l)
7. 7,28hl (l)
8. 0,9dal (cl)
9. 5,428l (ml)
10. 2,47hl (dl)
11. 7,28l (dl)
12. 347dl (l)
13. 6 423cl (l)
14. 4,73dl (cl)
15. 3,49hl (dal)
16. 35,58dal (hl)
17. 5,547hl (dal)
18. 23,57l (dal)
19. 839cl (l)
20. 2,8hl (l)
21. 315dl (l)
22. 32,8l (ml)
23. 3 756dl (dal)
24. 47 586dl (hl)
25. 9,52hl (dl)
26. 34 567cl (dal)
27. 64 738l (hl)
28. 7,59dal (cl)
29. 44,57l (ml)

148. Eqüivalência entre volumes e capacidades. Para substituir unidades de volume por unidades de capacidade, reduz-se o volume dado a dm^3, substitui-se a abreviatura do decímetro cúbico pela abreviatura do litro, e reduz-se o resultado à unidade de capacidade pedida no problema. Por exemplo, se quisermos reduzir $7{,}8m^3$ a hectolitros, teremos:

$$7{,}8m^3 = 7\,800dm^3 = 7\,800l = 78hl$$

Exercícios orais

Substituir os volumes que se seguem pela unidade indicada entre parênteses.

1. $1m^3$ (l)	6. $0{,}597dm^3$ (ml)	11. $84{,}9dm^3$ (dl)	16. $6{,}41m^3$ (hl)
2. $3{,}4m^3$ (dal)	7. $9{,}778dm^3$ (dal)	12. $437dm^3$ (l)	17. $7{,}042m^3$ (hl)
3. $4{,}8m^3$ (hl)	8. $2{,}936m^3$ (cl)	13. $14{,}85dm^3$ (cl)	18. $0{,}093m^3$ (dal)
4. $0{,}348m^3$ (dl)	9. $6{,}87dm^3$ (cl)	14. $23{,}74dm^3$ (dal)	19. $0{,}078m^3$ (l)
5. $0{,}0796m^3$ (l)	10. $2{,}47m^3$ (dal)	15. $438{,}972dm^3$ (hl)	20. $0{,}2538m^3$ (dl)

Para substituir unidades de capacidade por unidades de volume, reduz-se a capacidade dada a litros, substitui-se a abreviatura do litro pela abreviatura do decímetro cúbico, e reduz-se o resultado à unidade de volume pedida pelo problema. Por exemplo, reduzindo 357,428hl a metros cúbicos, teremos:

$$357{,}428hl = 35\,742{,}8l = 35\,742{,}8dm^3 = 35{,}742\,800m^3$$

Exercícios orais

Substituir as capacidades que se seguem pela unidade indicada entre parênteses.

1. 47,8l (dm^3)	6. 4,29dl (mm^3)	11. 7,8dal (dm^3)	16. 8,7hl (m^3)
2. 8,39l (cm^3)	7. 6,43dl (cm^3)	12. 34,9dal (cm^3)	17. 7,28hl (m^3)
3. 472,7l (dm^3)	8. 9,48cl (cm^3)	13. 328,6dal (dm^3)	18. 23,9hl (m^3)
4. 93,48l (cm^3)	9. 12,78cl (mm^3)	14. 8,47hl (dm^3)	19. 16,74dal (dm^3)
5. 7,8dl (cm^3)	10. 34 786cl (dm^3)	15. 93hl (m^3)	20. 93,48hl (cm^3)

Exercícios. Série LIII

Problemas sôbre medidas de capacidade

1. Reduzir a litros 7,8dal + 457dl + 9,386hl + 234,47l + 52 384cl + + 478 520ml.

2. Quantos litros de água contém um reservatório com 4,8m × 2, 7m × 0,65m?

3. Quantos dl de água contém uma caixa com 1,7m × 0,84m × 0,23m?

4. Um reservatório mede 3,7m × 2,4m × 3,6dm. Está cheio de gasolina cujo preço é de Cr$ 0,95 o litro. Calcular o valor de tôda a gasolina.

5. Um reservatório mede $1{,}6m \times 1{,}2m \times 67cm$. Para enchê-lo de água há uma torneira que despeja 34 litros por minuto. Em quanto tempo esta torneira enche o tanque?

6. Um reservatório tem a capacidade de 8 400 litros. Seu comprimento é de 4,7m e sua largura é de 2,3m. Calcular a sua profundidade com êrro inferior a 0,001m.

7. Um tanque tem 12,8m de comprimento e 8,4m de largura. Qual deve ser a sua profundidade para que possa conter 1 200hl de água?

8. Para encher um tanque de $5{,}6m \times 4{,}3m \times 1{,}7m$ são necessárias 22 horas. Quantos litros de água êste tanque recebe por minuto?

9. Um tanque mede $7{,}4m \times 5{,}3m \times 1{,}7m$. Êste tanque pode conter 1 000hl de água? É necessário aumentar a profundidade? De quanto?

10. Em uma vasilha cuja capacidade é de 1dal, despejaram-se $3{,}586dm^3$ de água. Quantos cl de água é preciso despejar ainda na mesma vasilha, para enchê-la completamente?

11. Comprei um barril de vinho de 480 litros por Cr$ 2 340,00. Engarrafei metade dêste vinho em garrafas de 1,5l e a outra metade em garrafas de 0,75l. Por quanto devo vender cada uma destas garrafas, para ganhar Cr$ 720,00?

12. Um litro de trigo em grão pesa 750 gramas. O trigo, depois de moído, dá 88% de seu pêso em farinha e o resto em farelo. Quantos quilogramas de farinha se obtém com a moagem de $4{,}8m^3$ de trigo?

13. Quantos dal de água pode conter um tanque que mede $7{,}8dam \times 24{,}7m \times 64cm$?

14. Se um litro de arroz custa Cr$ 1,30, quanto vale o arroz contido em uma caixa de $2{,}7m \times 15dm \times 82cm$?

15. Um reservatório tem 2,8m de largura e 1,4m de profundidade. Sua capacidade é de 250hl. Calcular o seu comprimento, com êrro inferior a 0,01m.

16. Um negociante comprou 39 litros de licor a Cr$ 25,00 o litro. Vendeu-o em cálices cuja capacidade é de 5,1cl e à razão de Cr$ 1,80 cada um. Qual foi o seu lucro?

17. Um negociante comprou arroz a Cr$ 0,85 cada litro. Com êste arroz encheu um depósito de $3{,}6m \times 2{,}4m \times 1{,}6m$. Qual foi o seu lucro, vendendo o arroz a Cr$ 1,20 cada litro, e supondo que 23% de todo o arroz, o que estava no fundo do depósito, perdeu-se devido à humidade?

18. A Cr$ 0,90 o litro, quanto vale a gasolina contida em um reservatório de $2{,}6m \times 1{,}7m \times 93cm$?

19. A Cr$ 3,70 o litro, quanto vale o vinho contido em um depósito de $2{,}1m \times 16dm \times 88cm$?

20. Qual é a profundidade de um tanque com 3,7dam de comprimento por 23,6m de largura, se a sua capacidade é de 2 000 000 de litros?

149. Volume do bloco retangular e do cubo. O processo para calcular o volume de um sólido geométrico é o indireto. (§ 122) Por exemplo, no caso do bloco retangular, medimos três arestas chamadas respectivamente ***comprimento, largura*** e ***altura*** do bloco, *tendo o cuidado de adotar a mesma unidade de*

comprimento para efetuar estas medições. Depois, multiplicando os três números resultantes, teremos o volume do bloco retangular em cubos cuja aresta é igual à unidade adotada para medir as três dimensões do bloco.

Para calcular o volume de um sólido geométrico é indispensável estabelecer ***uma unidade de volume***

A unidade de volume é um cubo cuja aresta é tomada como unidade de comprimento.

Tomando como unidade de comprimento o ***decímetro linear***, a unidade de volume será o ***decímetro cúbico***, e o volume do sólido geométrico dado será o número de ***decímetros cúbicos*** (e de partes alíquotas do decímetro cúbico) que êle contém.

Representando por v o volume de um bloco retangular ou de um cubo; por c, l e h as três dimensões do bloco; por B a base do mesmo bloco e por a a aresta de um cubo, podemos estabelecer as seguintes fórmulas:

$v = c \times l \times h$	$v = B \times h$	$v = a^3$

O volume de um cubo é a terceira potência do comprimento da aresta. Eis por que a ***terceira potência*** de um número é também chamada ***cubo*** dêste número.

Exercícios. Série LIV

1. Calcular o volume de um bloco retangular cujas dimensões são 4,4m, 27dm e 5,25m.

2. Em um bloco retangular, a largura é a metade do comprimento, e a altura é o quíntuplo do comprimento. A soma das três dimensões é 43,511m. Pede-se o volume do bloco.

3. O volume de um bloco retangular é 186,825m³. A altura mede 7,5m. Pede-se a área da base.

Sugestão. $v = B \times h \therefore B = v \div h$.

4. O volume de um bloco retangular com 7,2m de altura, é 123,456m³. Pede-se a área da base.

Observação. Se o resultado de um problema é uma área, e esta não pode ser obtida exatamente, deverá ser calculada, salvo aviso em contrário, com êrro inferior a 0,0001m².

5. O volume de um bloco retangular com 5,6m de altura, é 13,552m³. Calcular as dimensões da base, sabendo-se que uma é o dôbro da outra.

6. A aresta de um cubo de granito mede 1,36m. Um dm^3 dêste granito pesa 5,370kg. Calcular o pêso do cubo.

7. A aresta de um cubo de pedra mede 0,75m. Calcular o valor dêste cubo, se $1m^3$ custa Cr$55,00

8. A aresta de um reservatório de forma cúbica mede 2,5m. Contém azeite (cuja densidade é 0,915) faltando, porém, 22cm para que o reservatório fique completamente cheio. Calcular o pêso do azeite.

9. A aresta de um cubo de chumbo mede 0,42m. Transforma-se êste cubo em uma fôlha com uma espessura de 2,5mm. Calcular a superfície da fôlha.

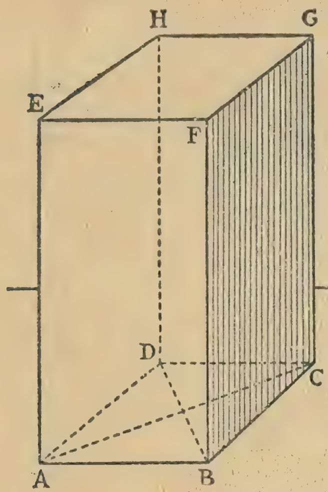


Fig. 17

150. O volume de prisma. Para calcular o volume de um prisma reto ou oblíquo, é bastante multiplicar a área da base pela altura.

Suponhamos que a nossa figura representa um prisma reto tendo por base um losango. A altura do prisma mede 7,2m. As diagonais da base medem respectivamente 1,6m e 1,2m. Para calcular o volume dêste prisma devemos calcular em primeiro lugar, a área da base. Ora:

$$\textit{área losango } \text{ABCD} = \frac{1{,}6 \times 1{,}2}{2} =$$

$$= 0{,}96\text{m}^2$$

Conhecida a área da base, teremos:

$$\textit{volume prisma } \text{AG} = 0{,}96 \times 7{,}2 = 6{,}912\text{m}^2.$$

Representando o volume de um prisma por $\boldsymbol{v}$, a base por $\boldsymbol{b}$ e a altura por $\boldsymbol{h}$, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h}}$$

Exercícios. Série LV

1. Um prisma reto com 6,5m de altura, tem por base um paralelogramo cuja base mede 2,4m e cuja altura mede 1,4m. Calcular o volume do prisma.

2. A base de um prisma reto é um paralelogramo cuja base mede 4,5m e cuja altura mede 3,2m. O volume do prisma é $120{,}960m^3$. Calcular a altura do prisma.

3. Um prisma reto tem por base um losango cujas diagonais medem 0,42m e 0,35m. Calcular o volume dêste prisma, cuja altura mede 2,5m.

4. Um terreno tem a forma de um trapézio cujas bases medem respectivamente 42,7m e 28,5m, e cuja altura mede 16,4m. Sôbre êste terreno espalha-se uniformemente uma camada de areia, com 2,5cm de espessura. Calcular o volume de tôda a areia.

5. Um prisma reto com 12,4m de altura, tem por base um triângulo retângulo cujos catetos medem 4,3m e 2,5m. Calcular o volume do prisma.

151. O volume da pirâmide. Para calcular o volume de uma pirâmide, multiplica-se a área da base pela altura, e divide-se o produto por 3.

A nossa figura representa uma pirâmide tendo por base um quadrado. Suponhamos que o lado dêste quadrado mede 1,5m e que a altura, VO, da pirâmide, mede 6,4m. A área da base é 1,5×1,5, isto é, 2,25m².

O volume da pirâmide será:

$$volume = \frac{2{,}25 \times 6{,}4}{3} = 4{,}800\text{m}^3$$

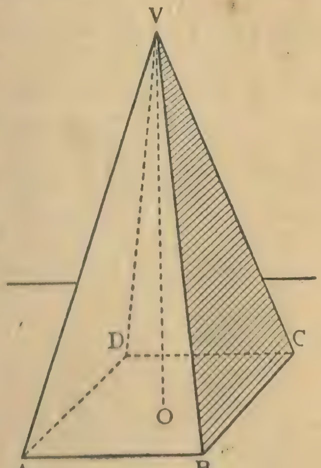


Fig. 18

Representando por v o volume de uma pirâmide, por b a base e por h a altura, podemos estabelecer que:

$$\boxed{v = \frac{b \times h}{3} \quad \Bigg| \quad v = \frac{b}{3} \times h \quad \Bigg| \quad v = b \times \frac{h}{3}}$$

Exercícios. Série LVI

1. Uma pirâmide tem por base um retângulo cujas dimensões são 3,2m e 2,5m. Calcular o volume da pirâmide cuja altura mede 10,4m.

2. Uma pirâmide de pedra com 2,4m de altura, tem por base um quadrado cujo lado mede 0,80m. Calcular o pêso da pirâmide, supondo-se que a densidade da pedra seja 2,5.

3. A Grande Pirâmide ou Pirâmide de Ghizeh, com 146,5m de altura, tem por base um quadrado cujo lado mede 233m. Calcular o volume da pirâmide e o seu pêso, admitindo-se que o material empregado na sua construção pese 3 000kg por metro cúbico.

4. Uma pirâmide com 1,6m de altura tem por base um triângulo retângulo cujos catetos medem 0,42m e 0,36m. Calcular o volume da pirâmide.

5. Uma pirâmide com 4,5m de altura e 1,470m³ de volume, tem por base um retângulo no qual uma das dimensões é o dôbro da outra. Calcular as duas dimensões da base.

Sugestão. $v = b \times \frac{h}{3} \quad \therefore \quad b = v \div \frac{h}{3}$

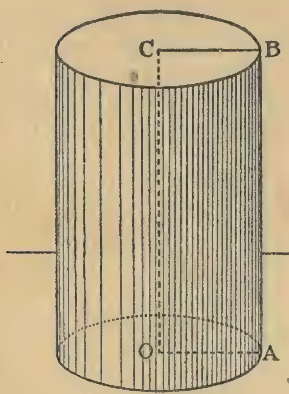


Fig. 19

152. Volume do cilindro. O volume de um cilindro é calculado como o de um prisma, isto é, multiplica-se a área da base, pela altura. Mas, a base de um cilindro de revolução é um círculo, cuja área é πr^2. (§ 137) Portanto, representando por v o volume de um cilindro, por r o raio OA da base, e por h a altura OC do mesmo cilindro, podemos estabelecer a seguinte fórmula:

$$\boxed{v = \pi r^2 h} \qquad (\pi = 3,14)$$

Exercícios. Série LVII

1. O raio da base de um cilindro com 4,7m de altura, mede 1,2m. Calcular o volume do cilindro.

2. Um reservatório cilíndrico mede 6,5m de raio e 2,25m de profundidade. Contém $^4/_5$ de sua profundidade em água. Calcular em hectolitros o volume da água.

3. Uma coluna cilíndrica com 8,4m de altura, tem um diâmetro de 0,30m. Qual é o seu volume?

4. Em um vaso cilíndrico cujo diâmetro interior mede 0,2m despejam-se 75,36 litros de água. Calcular a altura do vaso.

Sugestão. $v = \pi r^2 h \quad \therefore \quad h = v \div \pi r^2$.

5. Suponhamos que um cilindro seja ôco. O diâmetro exterior dêste sólido mede 0,48m e o interior, 0,36m. A altura dêste sólido é de 2,20m. Qual é o seu volume?

6. Um cilindro tem 15m de altura. A circunferência da base mede 7,536m. Calcular o volume do cilindro.

153. Volume do cone. Para calcular o volume de um cone de revolução, procede-se como em relação à pirâmide, isto é, multiplica-se a área da base pela altura do cone, e divide-se o produto por 3. Mas, o cone de revolução tem por base um

círculo cuja área é πr^2. (§ 137) Portanto, representando por v o volume de um cone, por r o raio OA da base e por h a altura OV do mesmo cone, podemos escrever as mesmas fórmulas do § 151.

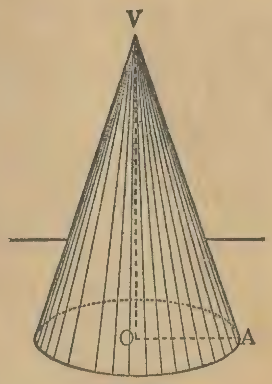


Fig. 20

Exercícios. Série LVIII

1. O raio da base de um cone com 5,4m de altura, mede 1,2m. Calcular o volume do cone.
2. O volume de um cone é 45,216m³. O raio da base mede 1,5m. Calcular a altura.
4. Um bloco de pedra, com a forma de um cone, tem uma altura de 7,5m. O raio da base mede 1,3m. Calcular o pêso dêste bloco, supondo-se que a densidade da pedra seja 7,1.
5. Um bloco de pedra tem a forma de um cone no qual o raio da base mede 2,2m e a altura 8,4m. Calcular o valor dêste bloco, admitindo-se que cada decímetro cúbico valha Cr$ 1,40.

154. Volume da esfera. O volume de uma esfera e a área da superfície esférica são dados pelas seguintes fórmulas:

$$v = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad s = 4\pi r^2$$

Observação. Os exercícios relativos a êste assunto serão dados pelos srs. professores e, de preferência, muito simples. Assim, dado o raio, pedir aos estudantes que calculem a área e o volume da esfera, do equador, dos meridianos, etc..

155. Unidades de massa. *O pêso de um corpo é a fôrça que atrai êste corpo para o centro da Terra;* depende do corpo e de sua situação na superfície da Terra; aumenta quando caminhamos com êste corpo, do equador para os polos; diminui quando caminhamos em sentido inverso; aumenta quando o corpo se aproxima do centro da Terra; diminui quando êle se eleva na atmosfera. Estas variações de pêso, aliás muito fracas, podem ser verificadas com uma mola bastante sensível.

A massa de um corpo é a quantidade de matéria de que é feito. A massa de um corpo é absolutamente invariável, seja qual fôr a situação dêste corpo na superfície da Terra. Na verdade, são as *massas* que se comparam ou se medem com as balanças.

Na linguagem usual, com a qual nos conformaremos aquí, dizemos ***pêso*** em lugar de ***massa,*** e esta confusão não acarreta dificuldades de espécie alguma, na vida prática. (*)

A unidade legal de massa é o ***quilograma.*** Entretanto, para estabelecer a escala dos múltiplos e submúltiplos usuais das unidades de massa, *toma-se como unidade principal o* ***grama.***

MÚLTIPLOS.......	quilograma	(kg)	=	1 000 gramas	
	hectograma	(hg)	=	100 gramas	
	decagrama	(dag)	=	10 gramas	
UNIDADE..........	grama	(g)	=	1 grama	(L)
SUBMÚLTIPLOS.....	decigrama	(dg)	=	0,1 do grama	
	centigrama	(cg)	=	0,01 do grama	
	miligrama	(mg)	=	0,001 do grama	

un. de milhar	centenas	dezenas	unidades	décimos	centésimos	milésimos
3	7	5	8,	9	4	6
kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

(M)

A unidade principal das medidas de massa é o ***grama.*** Imaginemos uma caixinha cúbica e cujo volume interior seja ***um centímetro cúbico.*** Se enchermos esta caixinha com ***água distilada,*** à temperatura de ***quatro graus centígrados,*** e sob pressão atmosférica normal, teremos dentro da caixinha uma quantidade de água, cuja ***massa*** é sensívelmente igual a ***um grama.*** Portanto, supondo a água nas condições acima indicadas, podemos admitir, na vida prática, as relações seguintes, bastante aproximadas.

1cm³ de água pesa.........1 grama.
1dm³ de água pesa 1 000 gramas. (1kg)
1m³ de água pesa 1 000 000 gramas. (1 000kg)

(*) *Lições de Aritmética*, de JÚLIO TANNERY, 9.ª edição revista, página 365.

Definições. *O* **quilograma** *é a massa do protótipo internacional do quilograma de platina iridiada que foi sancionado pela Primeira Conferência Geral de Pêsos e Medidas, e que se acha depositado na Repartição Internacional de Pêsos e Medidas. O* **grama** *é a milésima parte do protótipo internacional do quilograma.* (*)

Tudo o que dissemos em relação ao metro se aplica, sem restrições, às medidas de massa. É bastante substituir o quadro A pelo quadro L, o quadro B pelo quadro M, e a palavra *comprimento* pela palavra *massa.*

No comércio, o grama é unidade de massa pouco prática, por ser muito pequena. Toma-se como unidade o quilograma. O *quilograma* tem dois múltiplos: o quintal métrico e a tonelada métrica.

Um quintal métrico tem 100 quilogramas.
Uma tonelada métrica tem 1 000 quilogramas.

Entre os submúltiplos do grama temos também o *quilate* que pesa 0,2 do grama.

Exercícios orais

Reduzir as massas que se seguem à unidade indicada entre parênteses.

1. 8g (dg)	**8.** 9,2g (cg)	**15.** 2 345cg (g)	**22.** 8,6kg (g)
2. 8,4g (dg)	**9.** 6,24g (mg)	**16.** 4,7dag (dg)	**23.** 3,76kg (dag)
3. 0,36g (cg)	**10.** 3,8g (cg)	**17.** 378,9g (dag)	**24.** 3,48kg (hg)
4. 4,29g (mg)	**11.** 348cg (g)	**18.** 23,57hg (g)	**25.** 2 796,5dag (kg)
5. 0,57g (cg)	**12.** 4 937mg (g)	**19.** 3 785,6g (hg)	**26.** 84 597g (hg)
6. 7,3g (mg)	**13.** 4 283,8dg (g)	**20.** 76,8g (cg)	**27.** 12,9dag (cg)
7. 0,2g (mg)	**14.** 72,6g (g)	**21.** 3kg (g)	**28.** 632hg (g)

29. 8 quintais métricos (kg)	**37.** 4 268kg (quintais métricos)
30. 7 quintais métricos (kg)	**38.** 3 910 kg (quintais métricos)
31. 9 toneladas métricas (kg)	**39.** 37 580hg (quintais métricos)
32. 6 toneladas métricas (kg)	**40.** 345,7kg (quintais métricos)
33. 5 quintais métricos (dag)	**41.** 389 370kg (toneladas métricas)
34. 3,7 quintais métricos (kg)	**42.** 647 000kg (toneladas métricas)
35. 3,42 toneladas métricas (kg)	**43.** 317 000kg (quintais métricos)
36. 3 740kg (quintais métricos)	**44.** 7 261,84kg (quintais métricos)

45. 389 370kg (quintais métricos)

Dizer qual é a massa dos seguintes volumes de água:

46. 17cm³	**49.** 18,46dm³	**52.** 0,259m³
47. 3,8dm³	**50.** 3,7m³	**53.** 3,47cm³
48. 0,4dm³	**51.** 0,046m³	**54.** 4,083cm³

(*) Euclides Roxo, *Unidades e Medidas.*

Calcular o volume das seguintes massas de água:

55. 7,8g
56. 8,9dag
57. 8,9dag
58. 7,26hg
59. 5,37hg
60. 0,29dag
61. 7,236lg
62. 4,9cg
63. 4,9cg
64. 6,47dg

156. Os corpos e sua densidade. Um dm^3 de água ou um litro de água pura, na temperatura de quatro graus centígrados, pesa 1kg. Entretanto, um litro de leite pesa 1,030kg; um litro de azeite pesa 0,910kg; um litro de ácido sulfúrico pesa 1,840kg; um litro de mercúrio pesa 13,600kg; um dm^3 de platina pesa 22,060kg; um dm^3 de ouro pesa 19,260kg; etc.. (*) Portanto, volumes iguais de dois corpos diferentes não têm a mesma massa; 4 litros de leite pesam mais do que 4 litros de azeite; $7dm^3$ de ouro pesam menos do que $7dm^3$ de platina; etc.. Diz-se, então em Física, que os corpos não têm a mesma *densidade*. *Densidade (relativa) de um corpo é o número que exprime quantas vêzes a massa dêste corpo contém a massa de um igual volume de água distilada, à temperatura de 4 graus centígrados, isenta de ar e sob pressão normal.*

CORPO	DENSIDADE	MASSA
Platina	22,06	1 dm^3 pesa 22,060kg
Ouro	19,26	1 dm^3 pesa 19,260kg
Prata	10,47	1 dm^3 pesa 10,470kg
Cobre	8,85	1 dm^3 pesa 8,850kg
Ferro	7,78	1 dm^3 pesa 7,780kg
Sal	2,21	1 dm^3 pesa 2,210kg
Cortiça	0,24	1 dm^3 pesa 0,240kg
Mercúrio	13,60	1 dm^3 ou 1 litro pesa 13,600kg
Leite	1,03	1 dm^3 ou 1 litro pesa 1,030kg
Vinho	0,993	1 dm^3 ou 1 litro pesa 0,993kg
Azeite	0,91	1 dm^3 ou 1 litro pesa 0,910kg
Benzina	0,90	1 dm^3 ou 1 litro pesa 0,900kg
Éter	0,73	1 dm^3 ou 1 litro pesa 0,730kg

Conhecendo-se o *volume* de um corpo e a sua *densidade*, é muito simples calcular a *massa* dêste corpo. Por exemplo, qual é a massa de $7dm^3$ de platina? A densidade da platina

(*) Êsses números são aproximados.

é 22,06. Portanto, se 1dm³ de água pesa 1kg, 1dm³ de platina pesará 22,06kg; logo, 7dm³ pesarão 22,06kg$\times$7; isto é, 154,42kg.

Podemos, pois, estabelecer que:

volume *(em dm³)* $\times$ ***densidade*** = ***massa*** *(em kg)*
volume *(em cm³)* $\times$ ***densidade*** = ***massa*** *(em gramas)*

Conhecendo-se a *massa* de um corpo e a sua *densidade*, é muito simples calcular o *volume* dêste corpo. Por exemplo, qual é o volume de 3,600kg de cortiça? A densidade da cortiça é 0,24. Portanto, 1dm³ de cortiça pesa 0,240kg. Se 1dm³ de cortiça pesa 0,240kg, qual é o volume de 3,600kg de cortiça? É bastante dividir 3,600kg por 0,240kg. Resulta 15dm³ que é o volume pedido.

Podemos, pois, estabelecer que:

$$\frac{\textbf{massa}\,(em\ kg)}{\textbf{densidade}} = \textbf{volume}\ (em\ dm^3)$$

$$\frac{\textbf{massa}\,(em\ gramas)}{\textbf{densidade}} = \textbf{volume}\ (em\ cm^3)$$

Exercícios. Série LIX

1. Calcular a massa de 37dm³ de platina.
2. Calcular a massa de 47,8dal de vinho.
3. Calcular a massa de 7,29hl de azeite.
4. Calcular a massa de 15,48dm³ de ouro.
5. Calcular a massa de 8,241 de éter.
6. Calcular o volume de 300kg de prata.
7. Calcular o volume de 250kg de cortiça.
8. Calcular a massa de 3,28hl de leite.
9. Calcular a massa de 8m³ de benzina.
10. Calcular a massa de 24,87m³ de sal.
11. Um bloco de pedra com 36dm³ pesa 120kg. Qual é a densidade desta pedra?
12. Uma viga de madeira com 18,47dm³ pesa 11,45kg. Qual é a densidade desta madeira?

Exercícios. Série LX

Problemas sôbre medidas de massa

1. Um tanque mede 4,8m $\times$ 2,7m $\times$ 1,5m. Calcular em quintais métricos o pêso da água que êle pode conter.
2. Calcular em kg o pêso de um cubo de pedra cuja aresta mede 0,84m, sendo a densidade da pedra igual a 7,5.

3. Qual é o pêso de uma viga de peroba de 2,3m × 18cm × 0,07m, sendo a densidade da peroba igual a 1,4?

4. Um cubo de cortiça tem uma aresta de 1,4m. Sendo a densidade da cortiça igual a 0,24 calcular o valor dêste cubo a Cr$ 0,30 o quilograma.

5. Custando o azeite Cr$ 4,50 o quilograma, quanto vale o azeite contido em uma lata de 66cm × 34cm×34cm? A densidade do azeite é 0,91.

6. Quanto vale um bloco retangular de ouro, de 14cm × 8cm × 5cm a Cr$ 3,50 o grama? A densidade do ouro é 19,26.

7. Um hl de carvão pesa 83,500kg. Custando cada hl, Cr$ 7,20, quanto custarão 23 toneladas métricas?

8. Calcular em quintais métricos o pêso da água contida em um reservatório de 8,3m × 64dm × 32dm, faltando ainda 0,74m para que o reservatório fique completamente cheio.

9. Calcular o valor de 45 latas de benzina, cada uma das quais mede 0,48m × 0,35m × 0,35m, custando a benzina Cr$ 1,10 o kg. A densidade da benzina é 0,90.

10. Um litro de ar pesa 1,293g. Calcular o pêso do ar contido em um salão de 24m × 18m × 7,4m.

11. Um milharal mede 485m × 348m. Calcular o valor de uma colheita, sabendo-se que cada hectare produz 45hl de milho, o qual é vendido em sacas de 60kg a Cr$ 42,00 cada uma. Cada saca contém 90 litros.

12. Um reservatório de gasolina mede 8,5m × 6,4m × 2,9m. Vende-se esta gasolina em latas de 0,52m × 0,27m × 0,27m, a Cr$ 48,00 a lata. Qual é o valor de tôda a gasolina?

13. Um quintal métrico de trigo produz 83kg de farinha. Um kg de farinha produz 1,350kg de pão. Calcular a quantidade de pão que se pode fazer com 250hl de trigo, supondo que um hl pese 72kg.

14. Tenho duas pipas com o mesmo pêso e a mesma capacidade. Encho uma delas com azeite e a outra com água. E verifico que a pipa cheia de água pesa 27kg mais do que a pipa cheia de azeite. Qual é a capacidade de cada uma das pipas? A densidade do azeite é 0,91.

15. A densidade do leite é 1,03. Um sitiante tem 25 vacas, cada uma das quais dá, em média, por dia, 9 litros de leite. O leite produz 0,1 de seu pêso em creme, e o creme produz 4/7 do seu pêso em manteiga. Qual é em kg a quantidade de manteiga que o sitiante pode fabricar em um mês de 30 dias?

16. O café fino perde na torração 17% de seu pêso. Comprei 450kg de café a Cr$ 2,40; torrei-o, e depois vendí o quilo de pó a Cr$ 3,70. Quanto ganhei?

17. O fundo de um tanque mede 3,8m × 2,7m. Despejam-se neste tanque 5 400l de água. Qual será a altura da agua dentro do tanque?

18. O fundo de um tanque mede 4m × 3m. Despejam-se neste tanque 11 toneladas métricas de azeite. Qual será a altura do azeite dentro do tanque? A densidade do azeite é 0,91.

19. Põe-se um pedaço de ferro dentro de uma lata com água. A lata tem uma base de 0,36m por 0,36m e observa-se que o pedaço de ferro pôsto dentro da lata, faz com que o nível da água suba cêrca de 0,05m. Qual é o pêso do pedaço de ferro? A densidade do ferro é 7,78.

20 Um litro de água do mar pesa 1,025kg. Uma tonelada de água do mar contém 35kg de sal grosso. O sal grosso, depois de purificado, perde 20% de seu pêso. Quantos metros cúbicos de água do mar são necessários para obter 400kg de sal fino?

21. Uma pipa de vinho pesa 355kg. A mesma pipa cheia de água pesa 372kg. Calcular a capacidade da pipa, sendo a densidade do vinho igual a 0,95.

22. Um reservatório com a forma de um bloco retangular tem uma superfície (face superior) de $65m^2$. Está cheio de azeite avaliado em Cr$ 408 135,00. Um hectolitro de azeite pesa 91kg e custa Cr$ 300,00. Pede-se a profundidade do reservatório.

157. Números complexos. Já aprendemos que um metro tem 10 decímetros; um decímetro tem 10 centímetros; um centímetro tem 10 milímetros. Sabemos mais que 10 metros formam um decâmetro; 10 decâmetros formam um hectômetro; 10 hectômetros formam um quilômetro.

O metro, seus múltiplos e submúltiplos são unidades para medir uma certa classe de grandezas, por exemplo, os segmentos retilíneos. Estas várias unidades guardam entre si uma relação invariável, a saber:

Cada unidade de comprimento vale ***dez*** *unidades da ordem imediatamente inferior;* ***dez*** *unidades de comprimento, de uma mesma ordem, formam* ***uma*** *unidade da ordem imediatamente superior.*

Portanto, as unidades de comprimento são representadas tal qual como as unidades do sistema decimal de numeração; *os metros são unidades de primeira ordem; os* ***decâmetros*** *são* ***dezenas;*** *os* ***hectômetros*** *são* ***centenas;*** *os* ***decímetros*** *são* ***décimos,*** *etc..* E nisto consiste a grande simplificaçção que se conseguiu nos cálculos, substituindo-se os antigos sistemas de medidas pelo sistema métrico decimal.

Mas, para medir certas grandozas, não se adotam as uniddaes indicadas no sistema métrico decimal e sujeitas, portanto, à *divisão decimal.* Donde resulta, da avaliação destas grandezas uma classe especial de números, ***os números complexos.***

158. Definições. Carlos viajou durante 5 *anos,* 7 *meses,* 15 *dias e* 18 *horas.* Êste número é constituído por unidades diferentes, porém, da mesma natureza, a saber, o *ano,* o *mês,* o *dia* e a *hora;* são *unidades de tempo.* Entretanto, não ha, entre elas, a *relação decimal.* (§ 157) Não obstante, o número 5 *anos,* 7 *meses,* 15 *dias* e 18 *horas* pode ser reduzido a uma delas, por

exemplo, a *horas;* dá-se a êste número o nome de *complexo.* Portanto,

Número complexo é o número constituído por unidades da mesma natureza, mas que não guardam entre si a relação decimal.

Número incomplexo é o número constituído por uma única espécie de unidades: 15 anos, 35 *metros,* 78 litros, etc..

Os números complexos e incomplexos são sempre concretos.

Antes de iniciarmos as quatro operações sôbre números complexos, é necessário aprender as quatro transformações seguintes:

I. Redução de um número complexo a incomplexo.

II. Redução de um número incomplexo a complexo.

III. Transformação de um número complexo em fração.

IV. Transformação de uma fração em número complexo.

Observação. O significado destas quatro denominações tornar-se-á claro nos parágrafos que se seguem.

159. Unidades de tempo. A unidade legal de tempo é o *segundo,* isto é, um intervalo de tempo igual a $\frac{1}{86\,400}$ do dia solar médio (*).

Os múltiplos do segundo são o minuto, a hora e o dia.

um dia = 24 *horas* = 1 440 *minutos* = 86 400 *segundos*
uma hora = 60 *minutos* = 3 600 *segundos*
um minuto = 60 *segundos*

Os símbolos das unidades legais de tempo são: *d* (dia); *h* (hora); *m* ou *min* (minuto); *s* ou *seg* (segundo).

As medidas de tempo são números complexos.

Existem ainda outras unidades de tempo: a semana, o mês, o bimestre, o trimestre, o semestre, o ano, o século, etc..

O segundo não tem submúltiplos; para indicar frações do segundo, recorremos às frações decimais ou ordinárias. Por exemplo, 5 segundos e $\frac{1}{4}$; 3,48 segundos, etc..

Nos problemas que envolvem unidades de tempo, considera-se o ano comercial com 360 dias, e o mês comercial, com 30 dias.

(*) O diá solar médio é definido nas aulas de Geografia.

160. Redução de um número complexo a incomplexo. Consiste em reduzir o complexo dado à última das suas unidades. Como exemplo, vamos reduzir 3 anos, 7 meses, 25 dias e 10 horas a horas.

3 anos são $12 \times 3 = 36$ meses; 36 meses$+7$ meses são 43 meses; 43 meses são $43 \times 30 = 1\,290$ dias; 1 290 dias$+25$ dias são 1 315 dias; 1 315 dias são $1\,315 \times 24 = 31\,560$ horas; 31 560 horas$+10$ horas$=31\,570$ horas. Portanto, 3 anos, 7 meses, 25 dias e 10 horas são 31 570 horas.

Todas estas operações podem ser assim indicadas:

$$\left[(3 \times 12 + 7) \times 30 + 25\right] \times 24 + 10$$

Calculando esta expressão aritmética acharemos 31 570 horas.

161. A unidade monetária inglesa. É a libra esterlina, pequena moeda de ouro que pesa 7,988 gramas (pêso legal). As subdivisões da libra são o *shilling*, o *dinheiro* (penny) e o *farthing*. Uma libra tem 20 shillings; um shilling tem 12 dinheiros (pence), um dinheiro ou penny tem 4 farthings.

As abreviaturas da libra, shilling, dinheiro e farthing são *£.*, *sh.*, *d.* e *f.* Portanto, 5£. 13*sh.* 7*d.* 3*f.*, significa 5 libras esterlinas, 13 shillings, 7 dinheiros e 3 farthings.

Exercícios orais

1. Reduzir 1£. a dinheiros.
2. Reduzir 3£. e 10sh. a sh.
3. Reduzir 7sh. e 3d. a d.
4. Reduzir 5£. e 12sh. a sh.
5. Reduzir 11sh. e 10d. a d.
6. Reduzir 8d. e 3f. a f.
7. Reduzir 1sh. a f.
8. Reduzir 5sh. a f.
9. Reduzir 3£. a d.
10. Reduzir 4sh. e 2d. a f.
11. Quanto vale, em dinheiros, uma libra esterlina?
12. Se uma gravata custa 2sh., quantas poderei comprar com uma libra?
13. Se um doce custa um dinheiro, quantos poderei comprar com meia libra?
14. Gastei uma libra esterlina em gravatas. Custando cada uma delas meio shilling, quantas gravatas comprei?
15. Comprei doces a 3 dinheiros cada um e gastei uma libra esterlina. Quantos doces comprei?

Exercícios. Série LXI

1. Reduzir 7 anos a horas.
2. Reduzir 7£. 11sh. 9d. e 3f a farthings.
3. Reduzir 12 dias, 15 horas, 40 minutos e 25 segundos a segundos.
4. Reduzir 23£. a farthings.
5. Reduzir 4 meses, 22 dias, 15 horas e 23 minutos a segundos.

162. A unidade angular. A unidade mais usada para medir ângulos é o *grau*. O grau se subdivide em 60 partes iguais chamadas *minutos*. Cada minuto, por sua vez, se subdivide em 60 partes iguais chamadas *segundos*. Portanto 1 grau = 60 minutos e 1 minuto = 60 segundos. Suponhamos que um ângulo tem 36 graus, 45 minutos e 36 segundos; abreviadamente se escreverá: $36^\circ 45' 36''$. Completaremos êste assunto no § 173.

Exercícios. Série LXII

1. Quantos minutos tem um ângulo de 47°?
2. Quantos minutos tem um ângulo reto?
3. Reduzir $58^\circ\ 43'\ 52''$ a segundos.
4. Quantos segundos tem um ângulo reto?
5. Reduzir a segundos a têrça parte de um ângulo reto.
6. Reduzir $84^\circ\ 23'$ a segundos.
7. Reduzir $77^\circ\ 48''$ a segundos.

163. Redução de um número incomplexo a complexo. Consiste em reduzir o número incomplexo dado a número complexo. Como exemplo, vamos reduzir 4 875 farthings a número complexo.

Dividimos 4 875 farthings por 4, para convertê-los em dinheiros. Resultam 1 218 dinheiros e 3 farthings. Portanto,

4 875 farthings = 1 218 dinheiros + 3 farthings

Dividimos 1 218 dinheiros por 12, para reduzí-los a shillings. Resultam 101 shillings e 6 dinheiros. Portanto,

1 218 dinheiros = 101 shillings + 6 dinheiros ∴

4 875 farthings = 101 shillings + 6 dinheiros + 3 farthings.

Dividimos 101 shillings por 20, para reduzí-los a libras. Resultam 5 libras e 1 shilling. Portanto,

```
4875f. | 4
08      1218 | 12
07      018    101 | 20
35      6d.    1sh.  5£.
3f.
```

101sh. = 5£. + 1sh. ∴

4 875f. = 5£. 1sh. 6d. 3f.

A disposição prática para esta transformação é a que está indicada ao lado.

Exercícios orais

1. Reduzir 30sh. a £.
2. Reduzir 54sh. a £
3. Reduzir 50d. a sh.
4. Reduzir 72d. a sh.
5. Reduzir 84sh. a £.
6. Reduzir 50f. a d.
7. Reduzir 76d. a sh.
8. Reduzir 100sh. a £.
9. Reduzir 47d. a sh.
10. Reduzir 55d. a sh.

Exercícios. Série LXIII

1. Converter 37 519 farthings em libras.
2. Quantos graus tem um arco de 427 859 segundos?
3. Converter 1 235 467 segundos em dias.
4. Converter 379 513 minutos em dias.
5. Reduzir 65 317 horas a número complexo.
6. Converter 85 377 farthings em libras.
7. Converter 38 045 segundos em graus.
8. Reduzir 98 713 horas a número complexo.

164. Transformação de um número complexo em fração. Vejamos como se transforma um número complexo, em fração ordinária de uma das unidades que o compõem. A que fração do ano correspondem 7 meses, 12 dias e 16 horas?

$$7\text{m } 12\text{d } 16\text{h} = (7 \times 30 + 12) \times 24 + 16 = 5\,344 \text{ horas}$$
$$1 \text{ ano} = 12 \times 30 \times 24 = 8\,640 \text{ horas}$$

Se um ano tem 8 640 horas, segue-se que 1 hora $= \frac{1}{8\,640}$ do ano, e 5 344 horas $= \frac{5\,344}{8\,640}$ do ano $= \frac{167}{270}$ do ano.

Como segundo exemplo vamos reduzir 5£. 10sh. 4d. à fração da libra.

$$5£.\ 10\text{sh. } 4\text{d.} = (5 \times 20 + 10) \times 12 + 4 = 1\,324 \text{ dinheiros}$$
$$1£. = 20 \times 12 = 240 \text{ dinheiros}$$

Se uma £ tem 240 dinheiros, segue-se que 1 dinheiro $= \frac{1}{240}$ da £ e 1324d $= \frac{1\,324}{240}$ da £ $= 5\frac{31}{60}$ da £.

Para transformar um número complexo em fração decimal de uma das unidades que o compõem, é bastante convertê-lo primeiramente em fração ordinária e, depois, transformar esta em fração decimal com a aproximação pedida.

Exercícios orais

1. Reduzir 7sh. à fração da £.
2. Reduzir 5 dias à fração do mês.
3. Reduzir 15 minutos à fração do grau.
4. Reduzir 8 dinheiros à fração do sh.
5. Reduzir 8 horas à fração do dia.
6. Reduzir 20 minutos à fração da hora.
7. Reduzir 10sh. e 8d. à fração da £.
8. Reduzir 5sh. e 10d. à fração da £.
9. Reduzir 5 meses e 20 dias à fração do ano.
10. Reduzir 10 sh. à fração da £.

Exercícios. Série LXIV

1. Converter 15sh. 10d. 2f. em fração da £.
2. Reduzir 18sh. 6d. à fração decimal da £, com êrro inferior a 0,001.
3. Converter 7 meses, 10 dias e 12 horas em fração do ano.
4. Converter em fração decimal do grau o número 15°24'30" com êrro inferior a 0,01.
5. Reduzir 8£. 12sh. 10d. 3f. à fração da £.

165. Transformação de uma fração em número complexo. Como exemplo, vamos converter 4/11 do ano em número complexo.

$\frac{4}{11}$ do ano $=\frac{4}{11}$ de 12 meses $=\frac{48}{11}$ meses $=$ 4 meses e $\frac{4}{11}$ do mês.

$\frac{4}{11}$ do mês $=\frac{4}{11}$ de 30 dias $=\frac{120}{11}$ dias $=$ 10 dias e $\frac{10}{11}$ do dia

$\frac{10}{11}$ do dia $=\frac{10}{11}$ de 24 horas $=\frac{240}{11}$ horas $=$ 21 horas e $\frac{9}{11}$ da hora.

$\frac{9}{11}$ da hora $=\frac{9}{11}$ de 60 minutos $=\frac{540}{11}$ minutos $=$ 49 minutos e $\frac{1}{11}$ do minuto.

$\frac{1}{11}$ do minuto $=\frac{1}{11}$ de 60 segundos $=\frac{60}{11}$ segundos $=$ 5 segundos e $\frac{5}{11}$ do segundo.

Portanto, $\frac{4}{11}$ do ano $=$ 4 meses, 10 dias, 21 horas, 49 minutos, 5 segundos e $\frac{5}{11}$ do segundo.

Convertamos $\frac{5}{13}$ da £ em número complexo.

$\frac{5}{13}$ da £. $=\frac{5}{13}$ de 20sh. $=\frac{100}{13}$ sh. $=$ 7sh. e $\frac{9}{13}$ do sh.

$\frac{9}{13}$ do sh. $=\frac{9}{13}$ de 12d. $=\frac{108}{13}$ d. $=$ 8d. e $\frac{4}{13}$ do d.

$\frac{4}{13}$ do d. $=\frac{4}{13}$ de 4f. $=\frac{16}{13}$ f. $=$ 1f. e $\frac{3}{13}$ do f.

Portanto, $\frac{5}{13}$ da £ $=$ 7sh. 8d. 1f. e $\frac{3}{13}$ do f.

Êstes dois exemplos dispensam a regra.

Exercícios. Série LXV

1. Converter $\frac{7}{15}$ do ano em número complexo.

2. Transformar $\frac{7}{31}$ do grau em número complexo.
3. Reduzir $\frac{5}{14}$ da libra esterlina a número complexo.
4. Converter 3 anos e $\frac{5}{9}$ do ano em número complexo.
5. Transformar 35° e $\frac{11}{35}$ do grau em número complexo.
6. Reduzir 11£. e $\frac{4}{7}$ da £. a número complexo.
7. Reduzir £. 4,7 a número complexo.
8. Reduzir 5,32 anos a número complexo.
9. Transformar 56,13 graus em número complexo.
10. Quantos graus, minutos e segundos tem um ângulo igual a 0,43 de um ângulo reto?
11. Reduzir 0,23 do quadrante a graus, minutos e segundos.
12. Quantos graus, minutos e segundos tem um ângulo igual a 0,742 de um ângulo reto?

166. Adição de números complexos. É operação que não oferece dificuldade, como se vê no exemplo que se segue.

2	2	3	
3an.	7m.	10d.	15h. +
4an.	8m.	15d.	23h.
	9m.	21d.	19h.
2an.		22d.	
	6m.		16h.
11an.	8m.	11d.	1h.

Somam-se as unidades de cada uma das ordens, a saber *horas*, *dias*, *meses* e *anos*. Em seguida, lembrando que 73 horas = 3 dias e 1 hora, reunem-se os 3 dias aos 68 dias, ficando apenas 1 hora na soma das horas. A soma dos dias será então 68 dias + 3 dias = 71 dias = 2 meses e 11 dias. Reünem-se os 2 meses à soma dos meses, isto é, 30 meses, ficando apenas 11 dias na soma dos dias. E assim por diante.

Exercícios. Série LXVI

1. 3£. 11sh. 7d. 3f + 15sh. 11d. 2f. + 7£. 9d. + 16sh. 8d. 2f. =
2. 3an. 7m. 10d. 23h. + 11m. 18d. 19h. 45m. + 23d. 22h. 43m. 57s. =
3. 48°27′35″ + 56°34″ + 19°38′ + 23°57″ + 41°42′43″ =
4. 5£. 11sh. 7d¼ + 11£. 17sh. 9d¾ + 15£. 18sh. 11d.¾ =
5. 17°28′35″,7 + 36°52′58″,9 + 48°51′47″,6 + 33′34″,28 =

167. Subtração de números complexos. É também operação simples. Vamos subtrair 8£ 12sh 8d e 3f de 15£ 7sh 3d 2f. De 2f não podemos subtrair 3f; juntamos 4f aos 2f do minuendo e tiramos um dinheiro do mesmo. Assim o minuendo não se

15£.	7sh.	3d.	2f. —
8£.	12sh.	8d.	3f.
6£.	14sh.	6d.	3f.

altera porque 1d = 4f. E diremos: 6f — 3f = 3f. Em lugar de 3d temos agora 2d. De 2d não podemos subtrair 8d; juntamos 12d aos 2d do minuendo e tiramos 1sh do mesmo. Assim o minuendo não se altera, porque 1sh = 12d. E diremos: 14d — 8d = 6d. Em lugar de 7sh temos agora 6sh. E assim por diante.

Exercícios. Série LXVII

1. 15£. 10sh. 7d. 3f. - 8£. 15sh. 9d. 1f. =
2. 7an. 23d. 15h. 40m. - 4an. 5m. 14d. 23h. 57s. =
3. 73°26′29″,8 - 45°53′38″,43 =
4. £. 7,13 - 5£. 11sh. 13d. =
5. 7 an. $\frac{5}{11}$ - 4an. 8m. 13d. 12h. 53m. 48s. =
6. Qual a diferença entre um ângulo reto e um ângulo de 54°23′57″?
7. Qual a diferença entre 5£. e 3£. 17sh. 9d. $\frac{3}{5}$?

168. Multiplicação de números complexos. Há dois casos a considerar; o multiplicador pode ser incomplexo ou complexo.

3£.	17sh.	11d.
		×7
21£.	119sh.	77d.
21£.	125sh.	5d.
27£.	5sh.	5d.

Se um metro de casimira inglêsa custa 3£ 17sh 11d, quanto custarão 7 metros? Multiplicam-se as 3£, os 17sh e os 11d do multiplicando, separadamente, por 7. Resulta 21£ 119sh 77d. Lembrando que 77d são 6sh e 5d, juntam-se os 6sh aos 119sh; o produto será 21£ 125sh 5d. Lembrando que 125sh são 6£ e 2sh, juntam-se as 6£ às 21£; o produto definitivo será 27£ 5sh 5d.

Vejamos o caso em que o multiplicador é complexo. Se um operário ganha 33£ 10sh 8d por ano, quanto ganhará em 4 anos, 7 meses e 20 dias? Reduz-se o multiplicando à fração da £, e o multiplicador à fração do ano. Multiplicam-se as duas frações e converte-se a fração resultante em complexo.

$$33£\ 10sh\ 8d = (33\times20+10)\times12+8 = 8\ 048d = \frac{8\ 048}{240}(£) = \frac{503}{15}(£)$$

$$4a\ 7m\ 20d = (4\times12+7)\times30+20 = 1\ 670d = \frac{1\ 670}{360}(a) = \frac{167}{36}(a)$$

$$\frac{503}{15}\times\frac{167}{36} = \frac{84\ 001}{540}(£) = 155£\ 11sh\ 1d\ 3f\frac{1}{9}.$$

Às vêzes, o multiplicando é incomplexo e o multiplicador, complexo. Se uma jarda de sêda custa 3£, quanto custarão 15 jardas, 2 pés e 8 polegadas? Neste caso reduz-se o multiplicador à fração da jarda. (§ 169)

$$15\text{yd}\ 2\text{ft}\ 8\text{in} = (15 \times 3 + 2) \times 12 + 8 = 572\text{in} = \frac{572}{36}\ \text{(yards)}$$

$$3£ \times \frac{572}{36} = \frac{572}{12}\ £ = 47£\ 13\text{sh}\ 4\text{d}$$

169. Medidas inglesas de comprimento. São as seguintes:

mile	(milha)	(mi)	= 1 760 jardas =	1 609,314 9 m
furlong	(estádio)	(fur)	= 220 jardas =	201,164 37m
chain		(ch)	= 4 poles =	20,116 44m
pole ou perch	(vara		= 5,5 jardas =	5,029 11m
fathom	(braça)	(fath)	= 2 jardas =	1,828 77m
yard	(jarda)	(yd)	= *unidade* =	0,914 38m
foot	(pé)	(ft)	= 1/3 da jarda =	0,304 79m
inch	(polegada)	(in)	= 1/12 do pé =	0,025 40m

Exercícios. Série LXVIII

1. Se um operário economiza 5£. 13sh. 7d. 3f. por ano, quanto economizará em 12 anos?

2. Se um operário economiza 11£. 9sh. 9d. por ano, quanto economizará em 5an. 7m. 20d.?

3. Se um operário ganha 54£ por ano, quanto ganhará em 7an. 8m. 15d.?

4. Uma jarda de sêda custa 1£. 18sh. 7d. 3f. Quanto custarão 25 jardas?

5. Um fio de ouro com uma jarda de comprimento custa 7£. 8sh. 4d. Quanto custará um fio com 3yd. 2ft. 6in?

6. Se um pedreiro constrói 7 jardas de parede por mês, quantas jardas poderá construir em 4 meses, 10 dias e 8 horas?

170. Divisão de números complexos. Se o dividendo é complexo e o divisor é incomplexo, procede-se como está indicado no exemplo ao lado, no qual dividimos 15£ 13sh 11d 3f em 4 partes iguais. Dividimos 15£ por 4; o quociente é 3£ e restam 3£, as quais, reduzidas a shillings e somadas com os 13 shillings do dividendo, são 73 shillings. Dividimos 73 shillings por 4; o quociente é 18 shillings

```
15£.     13sh.   11d.   3f.   | 4
3×20+13 = 73sh.               3£ 18sh 5d 3f.3/4
        1×12+11 =23d.
              3×4+3=15f.
                     3
```

e sobra 1 shilling que, reduzido a dinheiros e somado com os 11 dinheiros do dividendo, são 23 dinheiros; e assim por diante.

Se o dividendo e o divisor são complexos, é necessário reduzí-los a frações da unidade principal de cada um dos complexos, dividir uma fração pela outra e converter a fração resultante em número complexo.

Se 3yd 2ft 10in de sêda custam 5£ 6sh 8d, quanto custará uma jarda?

$$5£\ 6sh\ 8d = (5\times20+6)\times12+8 = 1\,280d = \frac{1\,280}{240}(£) = \frac{16}{3}(£.)$$

$$3yd\ 2ft\ 10in = (3\times3+2)\times12+10 = 142in = \frac{142}{36}(yd) = \frac{71}{18}(yd)$$

$$\frac{16}{3} \div \frac{71}{18} = \frac{6}{3}\times\frac{18}{71} = \frac{96}{7}(£) = 1£.\ 7sh\ 0d\ 2f\frac{2}{71}.$$

Às vêzes o dividendo é incomplexo e o divisor, complexo. Se um operário ganhou 48£ em 5 meses, 10 dias e 16 horas, quanto ganhou por mês? Neste caso reduz-se o divisor à fração do mês.

$$5m\ 10d\ 16h = (5\times30+10)\times24+16 = 3\,856h = \frac{3\,856}{720}(mês) = \frac{241}{45}(ms)$$

$$48£ \div \frac{241}{45} = 48\times\frac{45}{241} = \frac{2\,160}{241}(£) = 8£\ 19sh\ 3d\ 0f.$$

Exercícios. Série LXIX

Problemas sôbre números complexos

1. Calcular o complemento de um ângulo com 37°36′48″.

$$90° - 37°36'48'' = 89°59'60'' - 37°36'48''.$$

$$\begin{array}{r} 89°\,59'\,60'' \\ 37°\,36'\,48'' \\ \hline 52°\,23'\,12'' \end{array}$$

Resposta, 52° 23′ 12″

2. Calcular o complemento de um ângulo com 49° 17′ 28″.
3. Calcular o complemento de um ângulo com 42° 51′.
4. Calcular o complemento de um ângulo com 34° 23″.
5. Calcular dois ângulos complementares, tendo por diferença 17°21′24″.
6. Calcular dois ângulos complementares, tendo por diferença 23°11′42″.
7. Dois ângulos são complementares e o menor é igual a $\frac{4}{11}$ do maior. Calcular os dois ângulos.
8. Dois ângulos são complementares e o maior é igual a $\frac{13}{5}$ do menor. Calcular os dois ângulos.
9. A quarta parte de um ângulo mede 13°23′24″. Quanto mede o complemento dêste ângulo?

10. Qual é o ângulo igual ao dôbro do seu complemento?
11. Qual é o ângulo igual ao triplo do seu complemento?
12. Qual é o ângulo igual ao quádruplo do seu complemento?
13. Calcular o ângulo que é igual à metade do seu complemento.
14. Calcular um ângulo que seja igual à têrça parte do seu complemento.
15. Calcular, em fração decimal do dia, a duração de um eclipse que começou às 10h 15m 38s e terminou às 11h 42m 54s.
16. Converter 3h 15m 20s em fração decimal do dia, com êrro inferior a 0,001.
17. Converter 4h 22m 36s em fração decimal da hora, com êrro inferior a 0,001.
18. Converter 3,24 dias em número complexo.
19. Converter 0,414 dias em número complexo.
20. Uma torneira despeja 11 litros de água por segundo. Quantos litros despejará em 12h 25m 46s?
21. Um ciclista percorre 15km em 24m 36s. Calcular a sua velocidade em quilômetros por hora.
22. Um automóvel percorre 42km em 54m 20s. Calcular a sua velocidade em metros por segundo.
23. Um homem dá 110 passos por minuto; cada passo mede 0,72m. Em quanto tempo percorrerá êle uma distância de 23,420km?
24. Se um ciclista percorre 5,640km em 2min e 25seg. em quanto tempo percorrerá 48,360km?
25. A Terra faz uma volta completa sôbre si mesma, em 24 horas. Calcular, em metros por segundo, a velocidade de um ponto situado no equador terrestre.
26. Um avião voa a favor do vento com uma velocidade de 346km a hora e contra o vento com uma velocidade de 248km a hora. Calcular a velocidade do avião em km por hora, e a do vento em metros por segundo.
27. Dois ângulos medem respectivamente 36° 21′ 28″ e 42° 48″. Calcular a soma e a diferença dos complementos dêstes dois ângulos.
28. Converter um ângulo de 37° 24′ em fração decimal do ângulo reto, com êrro inferior a 0,001.
29. Converter um ângulo com 42° 24′ 36″ em fração decimal do ângulo reto, com êrro inferior a 0,001.
30. Um ângulo mede 0,72 de um reto. Quantos graus, minutos e segundos tem êste ângulo?
31. Um ângulo mede 0,56 de um reto. Quantos graus, minutos e segundos tem êste ângulo?
32. Calcular o suplemento de um ângulo com 84° 35′ 28″.
33. Calcular o suplemento de um ângulo com 117° 28′ 39″.
34. Calcular o suplemento de um ângulo com 79° 28″.
35. Calcular o suplemento de um ângulo com 134° 22′.
36. Calcular dois ângulos suplementares, tendo por diferença 47° 31′ 44″.
37. Calcular dois ângulos suplementares, tendo por diferença 35° 32′ 47″.
38. Dois ângulos são suplementares e o menor é igual a $\frac{4}{11}$ do maior. Calcular os dois ângulos.

39. Dois ângulos são suplementares e o maior é igual a $\frac{13}{5}$ do menor. Calcular os dois ângulos.

40. A têrça parte de um ângulo mede 23° 48′ 57″. Quanto mede o suplemento dêste ângulo?

41. Qual é o ângulo igual ao dôbro do seu suplemento?

42. Qual é o ângulo igual ao triplo do seu suplemento?

43. Qual é o ângulo igual ao quádruplo do seu suplemento?

44. Qual é o ângulo igual à metade do seu suplemento?

45. Qual é o ângulo igual a um têrço do seu suplemento?

46. Paguei 16£. 15sh. 11d. 3f. por 9 jardas de sêda. Qual é o preço de uma?

47. Fiz um trabalho em 3 dias, 15 horas e 45 minutos e recebi 17£. Quanto ganhei por dia?

48. Um operário recebeu 147£. 15sh. 7d. 1f. pelo trabalho de 34 meses. Quanto ganhou por mês?

49. Paguei 17£. 9sh. 3d. 2f. por 34yd. 2ft. 6 inches de sêda. Quanto custou cada jarda?

171. Unidades inglesas e norte-americanas. As principais unidades inglesas de área, com os seus valores correspondentes em metros quadrados, são:

the square inch (a polegada quadrada).......... 0,000 645 16m²
the square foot (o pé quadrado)................ 0,092 896 94m²
the square yard (a jarda quadrada)............ 0,836 097m²
the square perch or rod (a vara quadrada)..... 25,291 939m²
the rood (*1 210 square yards*)............... 1 011,677 5m²
the acre (*4 840 square yards*)............... 4 046 710 0m²
milha inglêsa quadrada.............. 2 589 894,447 362m²

As principais unidades inglêsas de volume, com os seus valores correspondentes em metros cúbicos, são as que se seguem:

the cubic inch (a polegada cúbica)..... $(0{,}025)^3 m^3$
the cubic foot (o pé cúbico).......... $(0{,}304\,79)^3 m^3$
the cubic yard (a jarda cúbica)......... $(0{,}914\,30)^3 m^3$

"Entre as unidades usadas no Império Britânico e as que se usam na América do Norte há pequenas diferenças. Há entre os norte-americanos uma tendência para usar as frações decimais das diversas unidades, sobretudo da polegada. E' o que se chama ***decimalização***". (Euclides Eoxo)

Como exemplo, vamos converter 3yd 7in em fração decimal da braça. (§ 169)

Uma braça (*fathom*) tem 2 jardas; uma jarda (*yard*) tem 36 polegadas (*inch*); portanto, 1 braça tem 72 polegadas.

$$3\text{yd } 7\text{in} = 3 \times 36 + 7 \quad = 115\text{in}.$$

$$\text{Logo, } 3\text{yd } 7\text{in} = \frac{115}{72} \text{ da braça} = 1{,}597 \text{ da braça.}$$

Observação. Sôbre o assunto dêste parágrafo deixamos aos srs. professôres a tarefa de formularem os problemas e exercícios que acharem mais convenientes.

172. O movimento uniforme. Suponhamos que um trem caminha percorrendo invariavelmente 1 quilômetro por minuto ou 60 quilômetros por hora. Diremos que *êste trem está animado de um **movimento uniforme**.* Se um automóvel se deslocar percorrendo invariavelmente 30 quilômetros por hora ou 500 metros por minuto, diremos ainda que *êste automóvel está animado de um **movimento uniforme**.*

Em Matemática, dá-se o nome de ***móvel*** a qualquer corpo em movimento.

Um móvel está animado de um movimento uniforme, quando êle percorre espaços iguais em tempos iguais. Ou, ainda,

O movimento de um móvel é uniforme quando êste móvel percorre espaços iguais em tempos iguais.

***Espaço** é o caminho percorrido por um móvel qualquer.* Seria preferível dizer *trajetória* em lugar de *espaço,* porque o espaço é o meio onde estão situados todos os corpos. Mas o uso consagrou a palavra *espaço* para designar o caminho percorrido por um móvel. A unidade de espaço é uma unidade qualquer de comprimento.

Se um ciclista percorre 40km em 80 minutos, com movimento uniforme, diremos que a sua *velocidade* é de *500 metros por minuto,* porque 40km ÷ 80min = 40 000m ÷ 80min = 500m. Se um automóvel percorre 220km em 5 horas e meia, com movimento uniforme, diremos que a sua *velocidade* é de 40km por hora, porque 220km ÷ 5,5 horas = 40km. De um modo geral podemos dizer que:

*A **velocidade** de um móvel que se desloca com movimento uniforme é o espaço por êle percorrido durante a unidade de tempo.*

Exercícios em classe

Resolver, no quadro-negro, os seguintes problemas: (*)

1. Um menino caminha com a velocidade de 54,6m por minuto. Qual é o *espaço* por êle percorrido em 1 hora e 24 minutos?

2. Um automóvel percorreu 236km em 6 horas e ¾. Qual é a *velocidade* dêste automóvel?

3. Qual é o *tempo* necessário a um ciclista para percorrer 48km, com a velocidade de 30km por hora?

4. Um trem caminha com a velocidade de 42,5km por hora. Qual é o *espaço* por êle percorrido em 7 horas e 40 minutos?

5. Um navio percorreu 342km em 9 horas e 25 minutos. Qual foi a *velocidade* por êle desenvolvida?

6. Em quanto tempo um automóvel, correndo com a velocidade de 40km por hora, percorre uma estrada de 615km?

Dos problemas que acabamos de resolver podemos concluir que:

$$\textbf{\textit{espaço}} = \textbf{\textit{velocidade}} \times \textbf{\textit{tempo}}$$

$$\textbf{\textit{velocidade}} = \frac{\textbf{\textit{espaço}}}{\textbf{\textit{tempo}}} \qquad \textbf{\textit{tempo}} = \frac{\textbf{\textit{espaço}}}{\textbf{\textit{velocidade}}}$$

São estas as três ***fórmulas*** que ligam o *espaço*, a *velocidade* e o *tempo*, quando o movimento é uniforme.

A velocidade é o *quociente completo* de dois números: espaço e tempo.

O tempo é o *quociente completo* de dois números: espaço e velocidade.

A unidade legal de velocidade é o ***metro por segundo.*** É a velocidade de um móvel que, animado de um movimento retilíneo e uniforme, percorre uma distância de um metro durante um segundo. (**) Seu símbolo é $\frac{m}{s}$.

Outras unidades de velocidade podem ser adotadas como, por exemplo, o metro por minuto $\left(\frac{m}{min}\right)$, o centímetro por segundo $\left(\frac{cm}{s}\right)$, o quilômetro por hora $\left(\frac{km}{h}\right)$, etc..

No mar, a unidade adotada é o nó, eqüivalente a uma milha marítima internacional por hora, e que mede 1852m.

$$Um\ nó = 0{,}514 \left(\frac{m}{s}\right)$$

(*) Nos exercícios que se seguem suporemos sempre que o movimento é uniforme.

(**) Decreto-Lei n.º 4 257 de 6-6-1939.

Quando dizemos que um navio desenvolve 24 nós, queremos dizer que êste navio percorre 24 milhas por hora.

Para têrmos a velocidade dêsse navio em *metros por segundo*, é bastante dividir 1 852m por 3 600; acharemos 0,514m por segundo.

A conversão das unidades de velocidade é um problema muito simples.

Exercícios. Série LXX

O movimento uniforme

1. Dois automóveis partem às 6 horas da manhã, de duas cidades cuja distância é de 320km, e caminham um para o outro. A velocidade do primeiro é de 35km por hora e a do segundo é de 25km por hora. A que horas se encontrarão e a que distância dos pontos de partida?

Sugestão. Ao cabo de uma hora, a distância que separa os dois automóveis diminui de 35km + 25km.

2. Das extremidades de uma avenida que mede 1 496m partem, ao mesmo tempo, dois meninos que desejam encontrar-se. O primeiro caminha 48m por minuto, e o segundo apenas 20. A que distância das extremidades da avenida se encontrarão? Se êles partirem às 7 horas e 12 minutos, a que horas se encontrarão?

3. À margem de um rio estão situadas duas cidades. A e B, cuja distância ao longo dêste mesmo rio é de 136km. Às 8 horas da manhã partem dessas cidades dois barcos, um tripulado por 6 moços, e o outro por 5. O barco que parte da cidade A, tem uma velocidade de 15km por hora, e o que parte da cidade B tem uma velocidade de 18km por hora. A que horas se encontrarão e a que distância dos pontos de partida?

4. A distância entre duas cidades é de 600km. Às 6 horas da manhã parte da cidade A um automóvel com a velocidade de 48km por hora e às 7 horas e meia da manhã parte da cidade B um automóvel com a velocidade de 40km por hora. Um se dirige ao encontro do outro. A que horas se encontrarão, e a que distância dos pontos de partida?

Sugestão. Às 7 horas e meia da manhã, o automóvel A já percorreu 72km. Portanto, a essa hora, a distância que separa os dois automóveis é 600km — 72km, isto é, 528km.

5. Resolver o segundo problema, supondo que o primeiro menino partiu às 7 horas e 20 minutos, e o segundo às 7 horas e 30 minutos.

6. Resolver o terceiro problema, supondo que o barco A partiu às 8 horas da manhã, e o barco B às 9 horas.

7. Às 6 horas da manhã partiu de São Paulo, com destino ao Rio de Janeiro, um automóvel A, com a velocidade de 40km por hora. Às 9 horas da manhã partiu de São Paulo, também com destino ao Rio de Janeiro, um segundo automóvel B, cuja velocidade é de 65km por hora. Pergunta-se a que horas o segundo automóvel alcançará o primeiro, e a que distância de São Paulo.

Sugestão. Quando o automóvel B partiu, o automóvel A estava a 3×40km de distância da cidade de São Paulo. Portanto, às 9 horas da manhã, a distância que separava os dois carros era de 120km. E, a partir dessa hora, a mesma distância começou a diminuir de 65km — 40km por hora.

8. Um ciclista, cuja velocidade é de 13,5km por hora, partiu do Rio de Janeiro, ás 9 horas e meia da manhã. Ao meio dia, um segundo ciclista saíu em perseguição do primeiro, com a velocidade de 18km por hora. A que horas o segundo ciclista alcançou o primeiro?

9. Um ciclista partiu de São Paulo, às 8 horas da manhã, com uma velocidade de 20km por hora. Ao meio-dia, um automóvel partiu da mesma cidade, em perseguição do ciclista, com a velocidade de 45km por hora. A que horas o ciclista foi alcançado e a que distância de São Paulo.?

10. Um ciclista fez um certo trajeto com a velocidade de 900 metros cada três minutos; entretanto, se êle pudesse correr com a velocidade de 12km, em cada meia hora, teria chegado ao fim da viagem 35 minutos mais cedo. Qual foi o caminho percorrido pelo ciclista?

Sugestão. $\frac{1}{300}$ do caminho — $\frac{1}{400}$ do caminho = 35.

173. Unidades para medir ângulos. As unidades legais para medir os ângulos planos são três: o *ângulo reto*, o *grau* e o *radiano*.

O ângulo reto não tem múltiplos. Seus submúltiplos decimais se obtêm dividindo a unidade em dez, cem, mil, etc., partes iguais; portanto, êstes submúltiplos são os décimos, os centésimos, os milésimos, etc., da unidade.

Existe apenas um submúltiplo decimal do ângulo reto que tem nome especial; é o ***grado***. *O grado é a centésima parte do ângulo reto.* É representado pelos símbolos *gr* ou *g*. Êste último símbolo será usado quando não possa haver dúvida sôbre a sua significação. Assim, 36 gr significa 36 grados.

Os submúltiplos do grado são o *decigrado* (dgr), o *centigrado* (cgr) e o *miligrado* (mgr). (*)

Do exposto resulta que, se um ângulo mede 3,765 43 retos, êste mesmo ângulo mede 3 retos, 76 grados, 5 decigrados, 4 centigrados e 3 miligrados.

Portanto, converter grados em retos, e vice-versa, é um problema que não oferece dificuldade. Exemplos:

(*) Decreto n.º 4 257 de 6-6-1939. Portanto, desaparecem os nomes minutos centesimais e segundos centesimais.

3 retos = 300 grados	0,533 retos = 53,3 grados
47,8 grados = 0,478 retos	2,149 6 retos = 214,96 grados
0,562 grados = 0,00562 retos	7,33dgr = 733mgr

O grau é um nonagésimo do ângulo reto. Seus submúltiplos são o *minuto* e o *segundo*. Um ângulo medido em graus, minutos e segundos constitui um número complexo.

Um ângulo também pode ser medido em graus e frações decimais do grau. Mas, para êstes submúltiplos decimais, não há nomes particulares.

Exercício. *Um ângulo mede 37° 25′ 48″. Converter esta medida em graus e fração decimal do grau.*

É bastante converter 25′ e 48″ em fração decimal do grau. Em primeiro lugar convertemos 25′ e 48″ em fração ordinária do grau.

$$25' \; 48'' = \frac{25}{60} + \frac{48}{3\,600} = \frac{5}{12} + \frac{1}{75} = \frac{129}{300} \text{ do grau}$$

Depois converteremos $\frac{129}{300}$ em fração decimal.

$$\frac{129}{300} \text{ do grau} = \frac{43}{100} \text{ do grau} = 0{,}43 \text{ do grau}$$

Logo, 37° 25′ 48″ = 37,43 graus.

Exercícios. Série LXXI

Problemas sôbre graus e grados

Um ângulo reto tem 90 graus ou 100 grados; podemos, pois, estabelecer as igualdades seguintes:

90 graus = 100 grados	*100 grados = 90 graus*
1 grau $= \frac{100}{90}$ *do grado*	*1 grado* $= \frac{90}{100}$ *do grau*
1 grau $= \frac{10}{9}$ *do grado*	*1 grado* $= \frac{9}{10}$ *do grau*

Destas igualdades se deduz a seguinte

Regra. *Para converter graus em grados, multiplica-se o número de graus por* $\frac{10}{9}$*; para converter grados em graus, multiplica-se o número de grados por* $\frac{9}{10}$.

Observação. Se o ângulo é dado em graus, minutos e segundos, convém convertê-lo em fração decimal do grau.

1. Converter 37° em grados.

Solução. $37 \times \frac{10}{9} = \frac{370}{9} = 41{,}1111$

Resposta. 37° = 41,1111 grados.

2. Converter 54° 24′ em grados.

Solução. $54° + 24' =$

$$54° + \frac{24}{60} =$$

$$54° + \frac{4}{10} = 54°{,}4$$

$$54{,}4 \times \frac{10}{9} = \frac{544}{9} = 60{,}444\,4$$

Resposta. 60,444 4 grados.

3. Converter 72° 24′ 36″ em grados.

Solução. $72°\ 24'\ 36'' =$

$$72° + \frac{24}{60} + \frac{36}{3600} =$$

$$72° + \frac{2}{5} + \frac{1}{100} =$$

$$72° + \frac{41}{100} = 72°{,}41$$

$$72{,}41 \times \frac{10}{9} = \frac{724{,}1}{9} = 80{,}455\,5$$

Resposta. 80,455 5 grados

4. Converter 52,374 grados em graus.

Solução. $52{,}374 \times \frac{9}{10} = 47°{,}136\,6$

$$\frac{1\,366}{10\,000} \text{ de um grau} = \frac{1\,366}{10\,000} \text{ de 60 minutos} = 8'\ \frac{196}{1\,000}$$

$$\frac{196}{1\,000} \text{ de um minuto} = \frac{196}{1\,000} \text{ de 60 segundos} = 11''\frac{76}{1\,000}$$

Resposta. 52,374 grados = 47° 8′ 11″,760.

5. Converter 44°,36 em grados.

6. Converter 62° 25′,8 em grados.

7. Converter 75° 22′ 45″ em grados.

8. Converter 48,75 grados em graus.

9. Converter 85,364 grados em graus.

10. Converter 33,4455 grados em graus.

Observação. O comprimento de uma circunferência é dado pela fórmula $l = 2\pi r$, na qual l representa o comprimento da circunferência, r o raio e π o número 3,14. (§ 174)

11. O raio de uma circunferência mede 12,5m. Quanto mede o arco de um grau, desta circunferência?

12. Calcular o comprimento do arco de um grado, em uma circunferência cujo raio mede 36,5m.

13. O raio de uma circunferência mede 3,6m. Calcular o comprimento de um arco da mesma com 54°24′.

14. Qual é o comprimento de um arco com 48,36 grados, em uma circunferência cujo raio mede 4,5m?

15. O raio de uma circunferência mede 5,2m. Calcular o comprimento de um arco da mesma, com 42,35 grados.

16. Qual é o comprimento de um arco com 33,6425 grados, em uma circunferência cujo raio mede 7,5m?

17. Dois ângulos de um triângulo medem respectivamente 47°23′28″ e 84°45′57″. Quanto mede o terceiro?

18. Dois ângulos de um triângulo medem respectivamente 56,85 grados e 74, 5543 grados. Quanto mede o terceiro?

19. Em um triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede 42°,6. Calcular o outro, em graus.

20. Calcular os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo, sabendo-se que sua diferença é 17° 22′ 44′.

174. O radiano. Inicialmente precisamos aprender como se mede o comprimento de uma circunferência.

Isto pôsto, tomemos um círculo com 30cm de diâmetro. Coloquemos o círculo sôbre uma reta XY, de modo que um ponto qualquer A, da circunferência, coincida com um ponto qualquer M, da mesma reta XY. Em seguida, façamos o círculo rolar sôbre a reta XY, no sentido indicado pelas setas, até que

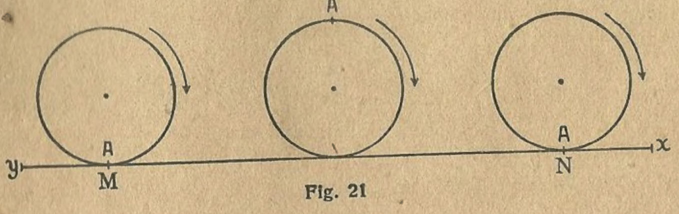


Fig. 21

o ponto A da circunferência toque novamente na reta XY. Seja N o ponto da reta XY, com o qual coincide o ponto A da circunferência. Então o segmento retilíneo representa o comprimento da circunferência com 30cm de diâmetro; o segmento retilíneo MN ***é a circunferência retificada.*** Medindo MN acharemos 0,942m. Portanto, o comprimento da circunferência com 30cm de diâmetro é 0,942m.

Entretanto, êste processo para medir o comprimento de uma circunferência é, evidentemente, pouco prático. O processo geométrico, cuja razão de ser aprenderemos mais tarde, consiste na seguinte

> ***Regra.* Para calcular o comprimento de uma circunferência, é bastante medir o diâmetro, e multiplicar o número resultante pelo número 3,14.**

Exemplo. Qual é o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 12 metros?

Solução. O raio mede 12m; o diâmetro mede o dôbro do raio, isto é, 2×12 ou 24m. Portanto, a circunferência mede $24 \times 3,14 = 75,36$m.

Observação. O número 3,14 é representado em Matemática pela letra grega π, que se lê *pi.*

A circunferência é uma linha curva e fechada; todos os seus pontos estão situados em um mesmo plano e distam igualmente de um ponto fixo, situado no mesmo plano. Podemos, pois dizer que:

A circunferência é o caminho percorrido por um ponto que se desloca em um plano, conservando-se sempre a uma mesma distância de um ponto fixo situado no mesmo plano.

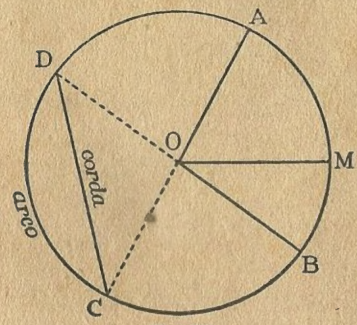


Fig. 22

Os ângulos AOM, MOB, BOC são chamados ângulos centrais.

Angulo central é aquêle cujo vértice coincide com o centro de uma circunferência. Seus lados são raios.

O radiano é um angulo central cujos lados interceptam um arco de circulo cujo comprimento é igual ao raio do mesmo circulo.

O símbolo do radiano é *rd*. A unidade legal de velocidade angular é o *radiano por segundo*, cujo símbolo é $\frac{rd}{s}$.

O radiano por segundo *é a velocidade angular de um móvel que, animado de um movimento de rotação uniforme, gira de um ângulo de um radiano durante um segundo.* (Euclides Roxo)

O comprimento da circunferência sendo dado pela fórmula $2\pi r$ ou $2 \times 3{,}14 \times r$ ou $6{,}28r$, segue-se que uma rotação completa de um ponto A (fig. 22) em tôrno de um ponto fixo, O, vale $6{,}28rd$.

Exercício. Se o ponto A (fig. 22) se deslocar com movimento uniforme de rotação, em tôrno do ponto O, com a velocidade angular de 144,44 radianos por segundo, quantos rotações por segundo executará?

Solução. $144{,}44 \div 6{,}28 = 23$ rotações por segundo.

Exercício. Se o ponto A se deslocar com a velocidade angular de 10 rotações por segundo, qual será a sua velocidade em radianos por segundo? (Euclides Roxo)

Solução. $10 \times 6{,}28 = 62{,}8\ \frac{\text{rd}}{\text{s}}$.

Preço dêste vol. Cr$35,00